

Маятник с осциллирующим подвесом (к 60-летию маятника Капицы)

Е. И. Бутиков

Санкт-Петербургский государственный университет

Содержание

1	Введение: изучаемая физическая система	2
2	Параметрический резонанс	5
3	Динамическая стабилизация перевернутого маятника	7
4	Приближенная количественная теория перевернутого маятника	9
5	Эффективный потенциал для медленного движения маятника	13
6	Субгармонические резонансы высших порядков	16
7	Спектр и границы субгармонических колебаний	18
8	Сосуществование субгармонических резонансов разных порядков n	23
9	Верхняя граница динамической стабилизации и параметрический резонанс	25
10	Влияние трения	31
11	Субгармонические резонансы дробных порядков	33
12	Сложные виды периодических режимов	34
13	Хаотические режимы	37
14	Заключительные замечания	40
	Список литературы	41

Аннотация

Рассматриваются некоторые хорошо известные и недавно открытые неожиданные виды движения простого жесткого маятника с осциллирующим подвесом. Приведено наглядное физическое объяснение явления динамической стабилизации перевернутого маятника. Рассчитаны условия возникновения субгармонических резонансов, обсуждается их связь с динамической стабилизацией и получен уточненный критерий стабилизации. Установлена связь верхнего предела устойчивости перевернутого маятника с потерей устойчивости нижнего положения. Компьютерное моделирование и аналитическое исследование взаимно дополняют и обогащают друг друга, способствуя пониманию сложного поведения маятника.

PACS numbers: 05.45.-a, 05.45.Ac, 05.45.Pq, 05.10.-a, 07.05.Tr, 45.10.-b

1 Введение: изучаемая физическая система

Обычный жесткий маятник, подвес которого совершает принудительные колебания в вертикальном направлении, демонстрирует, в зависимости от частоты и амплитуды вынужденных колебаний точки подвеса, большое число разнообразных видов движения. Некоторые движения этой простой механической системы оказываются неожиданно сложными и зачастую противоречат нашей интуиции. Поведение такого маятника интенсивно изучается вот уже более столетия. Он вызывает неослабевающий интерес не только как пробный камень новых методов исследования нелинейных систем, но и потому, что дифференциальное уравнение маятника часто встречается в самых разных проблемах современной физики. Механические аналоги различных физических систем допускают непосредственную визуализацию движения, что очень полезно для понимания поведения сложных систем и вообще для развития физической интуиции.

Когда частота вынужденных осцилляций точки подвеса приблизительно вдвое больше частоты собственных колебаний маятника, нижнее положение равновесия становится неустойчивым: амплитуда первоначально сколь угодно малых колебаний маятника начинает прогрессивно нарастать со временем. Это хорошо известное явление называется *параметрическим резонансом*.

Наряду с основным параметрическим резонансом, который происходит, когда на протяжении одного собственного колебания укладывается приблизительно два цикла осцилляций подвеса, возможны *резонансы высших порядков*, если два цикла возбуждения происходят на протяжении двух, трех или другого целого числа собственных колебаний. При малых и умеренных амплитудах осцилляций подвеса возбуждаемые параметрические колебания маятника во всех случаях очень похожи на его собственные колебания такого же размаха: те и другие имеют почти одинаковую форму временной зависимости, и период параметрических колебаний близок к периоду собственных колебаний маятника. Трение создает порог возбуждения: амплитуда принудительных осцилляций подвеса должна быть достаточно большой, чтобы снабжать маятник энергией, необходимой для компенсации потерь из-за трения. С увеличением трения возбуждать параметрические резонансы высоких порядков становится все труднее.

Другой возможный вид регулярного поведения маятника — это *полные перевороты* в одном направлении, синхронизированные с осцилляциями подвеса. Период такого неравномерного вращения либо равен периоду возбуждения, либо в целое число раз больше. Благодаря синхронизации переворотов с осцилляциями подвеса (благодаря так называемому «фазовому захвату») обеспечивается подпитка маятника энергией, необходимая для компенсации потерь из-за трения. Более сложные виды регулярных установившихся движений маятника при параметрическом возбуждении состоят из нескольких колебаний, чередующихся с переворотами в ту или другую сторону, также синхронизированных с осцилляциями подвеса. Различные конкурирующие между собой виды движений могут сосуществовать при одних и тех же значениях амплитуды и частоты колебаний подвеса. Это свойство нелинейных систем называют мультистабильностью. Какое именно движение из нескольких возможных установится после завершения переходного процесса, зависит от начальных условий: каждому установившемуся режиму соответствует свой «бассейн притяжения» на плоскости начальных состояний.

Когда амплитуда принудительных осцилляций подвеса достаточно велика, а их частота лежит в некоторых определенных интервалах, поведение маятника может быть нерегулярным, *хаотическим* несмотря на строго периодический характер возбуждающего воздействия. Это пример так называемого *динамического хаоса*, когда нерегулярное, никогда не повторяющееся во времени поведение системы сочетается с полным детерминизмом ее математического описания: при заданных начальных условиях решение соответствующего дифференциального уравнения единственно. Динамический хаос в простых нелинейных системах стал предметом интенсивного изучения на протяжении последних десятилетий. Маятник с осциллирующим подвесом дает прекрасный пример физической модели для исследования закономерностей как хаотических, так и разнообразных регулярных движений в простых нелинейных динамических системах.

Интересная черта в поведении жесткого маятника с осциллирующим подвесом заключается в *динамической стабилизации* перевернутого положения равновесия. При достаточно больших значениях частоты и амплитуды осцилляций подвеса приведенный в перевернутое положение маятник не обнаруживает тенденции к опрокидыванию. Более того, при умеренных отклонениях от вертикали маятник стремится к этому перевернутому положению. Если маятник отклонить от вертикали, он будет совершать сравнительно медленные колебания около перевернутого положения на фоне быстрых осцилляций подвеса. На это теперь широко известное предсказание классической механики впервые, по-видимому, обратил внимание А. Стефенсон [1] еще в 1908 году. Физическое объяснение динамической стабилизации перевернутого маятника было предложено академиком Петром Леонидовичем Капицей в 1951 году, выполнившим также и детальное экспериментальное исследование этого явления (см. [2], [3]). Приведем цитату из статьи Капицы, опубликованной в журнале «Успехи физических наук» [3]:

«Демонстрация явления колебания перевернутого маятника весьма эффектно, быстрые мелкие передвижения, вызванные вибрациями, не заметны на-глаз, поэтому поведение маятника в перевернутом положении производит на зрителя неожиданное впечатление. . . Если осторожно прикоснуться пальцем к стержню маятника и отводить его в сторону, то палец чувствует давление, производимое вибрационным моментом. После ознакомления на опыте с динамической устойчивостью

маятника в перевернутом положении трудно не прийти к выводу, что она так же поучительна, как и динамическая устойчивость волчка, и ей также следует занять почетное место в лектории на демонстрациях по механике.»

Для демонстрации этого явления можно использовать старую электробритву вибрационного типа, как показано на рис. 1. К vibratorу прикреплен удлинитель для увеличения амплитуды осцилляций подвеса маятника. Легкий жесткий стержень маятника соединен с концом удлинителя через шарнир. Корпус бритвы удерживается рукой в таком положении, чтобы вибрация оси происходила в вертикальном направлении. Если стержень маятника привести в вертикальное перевернутое положение, он остается в этом положении до тех пор пока ось вибрирует. Если стержень маятника немного отвести в сторону и отпустить, наблюдаются колебания около перевернутого положения.

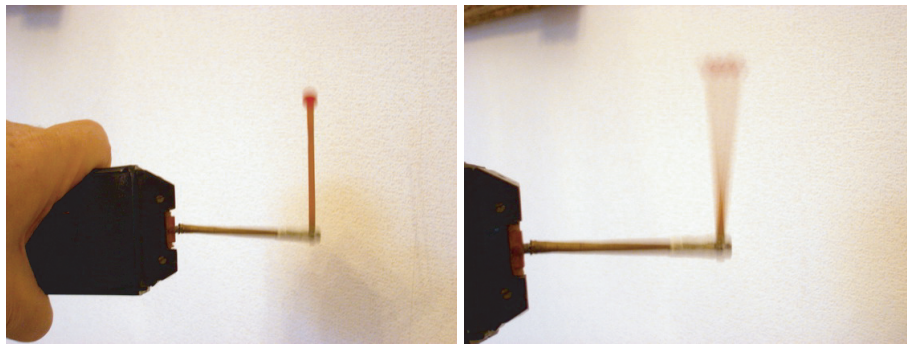


Рис. 1: Демонстрация динамической стабилизации перевернутого маятника.

Неудивительно, что эта интригующая система (получившая название «маятник Капицы») привлекла затем внимание многих исследователей. Поэтому может сложиться впечатление, что теория этого явления хорошо разработана (см., например, курс теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [4]). Подробную библиографию исследований на эту тему, насчитывающую сотни наименований, можно найти в монографиях [5] и [6]. Тем не менее в научной печати на протяжении последних десятилетий регулярно появляются сообщения (например, [7] - [23]) о все новых и новых чертах в поведении такой простой, но по всей видимости неисчерпаемой физической системы.

Среди сравнительно недавних открытий можно выделить дестабилизацию (динамически стабилизированного) перевернутого положения маятника при достаточно больших амплитудах вибрации подвеса [7] - [8]. Эта дестабилизация проявляется как возбуждение так называемой «флаттер»-моды колебаний с периодом, вдвое превышающим период вынужденных осцилляций подвеса. Другое заслуживающее внимания открытие — это регулярные n -периодические моды «кивающих» колебаний (“multiple-nodding” oscillations) [9].

В этой статье мы предложим простое физическое объяснение динамической стабилизации перевернутого маятника и уточним критерий стабилизации. Мы покажем, что происхождение «флаттер»-моды колебаний тесно связано с обычным параметрическим резонансом, т.е. с хорошо известным явлением параметрической неустойчивости неперевернутого маятника. Мы также покажем, что «кивающие»

n -периодические колебания можно интерпретировать как субгармонические параметрические резонансы высоких порядков. Теоретическое изучение дополняется компьютерным моделированием, иллюстрирующим многочисленные экзотические режимы поведения маятника с осциллирующим подвесом [24].

2 Параметрический резонанс

Будем для простоты рассматривать маятник в виде легкого жесткого стержня длиной l с грузом (точечной массой) m на конце, считая, что именно здесь сосредоточена вся масса маятника. Сила тяжести $m\mathbf{g}$ создает возвращающий момент $-mgl \sin \varphi$, пропорциональный синусу угла отклонения φ маятника от положения равновесия. Когда подвес маятника неподвижен, этот момент заставляет отклоненный маятник совершать колебания относительно нижнего положения устойчивого равновесия. Если же подвес принудительно движется с некоторым ускорением, поведение маятника удобно описывать с помощью неинерциальной системы отсчета, связанной с подвесом. Из-за ускоренного движения такой системы отсчета на все тела, наряду с «обычными» силами, действует еще и сила инерции («псевдосила»), направленная противоположно ускорению системы отсчета. Допустим, что подвес осциллирует вдоль вертикали и его координата $z(t)$ изменяется со временем по гармоническому закону с некоторой частотой ω и амплитудой a :

$$z(t) = a \cos \omega t \quad \text{или} \quad z(t) = a \sin \omega t. \quad (1)$$

В зависимости от характера решаемой задачи в (1) может оказаться удобным тот или иной выбор начальной фазы осцилляций подвеса (выбор начала отсчета времени). Приложенная к грузу маятника сила инерции $F_{\text{in}}(t)$ также зависит от времени по синусоидальному закону:

$$F_{\text{in}}(t) = -m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -m \ddot{z}(t) = m\omega^2 z(t). \quad (2)$$

Сила инерции направлена вниз в течение тех интервалов времени, когда осциллирующий подвес находится ниже своего среднего положения, т.е. когда $z(t) < 0$. Это непосредственно видно из выражения (2) для $F_{\text{in}}(t)$, правая часть которого зависит от времени так же, как и z -координата подвеса. Поэтому на протяжении соответствующей половины периода колебаний подвеса действие силы инерции равносильно некоторому увеличению силы тяжести. На протяжении другой половины периода, когда подвес находится выше среднего положения (когда $z(t) > 0$), сила инерции направлена вверх, что равносильно уменьшению силы тяжести.

Принимая во внимание такое периодическое изменение (модуляцию) эффективной силы тяжести, легко понять причину раскачки маятника при параметрическом резонансе, когда два цикла модуляции происходят на протяжении одного периода собственных колебаний (рис. 2). В самом деле, пусть при движении маятника к положению равновесия от точки наибольшего отклонения (это четверть собственного периода) осциллирующий подвес все время находится ниже среднего положения, т.е. $z(t) < 0$ (что занимает половину периода осцилляций). Благодаря увеличению эффективной силы тяжести маятник придет к положению равновесия

с большей скоростью, чем в отсутствие осцилляций подвеса. В момент прохождения маятником вертикального положения движущийся вверх подвес пересекает свое среднее положение. При движении маятника к точке наибольшего отклонения осциллирующий подвес находится выше среднего положения ($z(t) > 0$, рис. 2), что, как мы видели, равносильно уменьшению силы тяжести. В результате маятник отклонится на больший угол, чем при неподвижном подвесе. При обратном движении к положению равновесия эффективная сила тяжести опять увеличивается, и маятник набирает еще бóльшую скорость, и т.д. Для наиболее интенсивной раскачки частота принудительных осцилляций подвеса должна быть вдвое больше частоты собственных колебаний маятника, и фазовые соотношения должны быть такими, чтобы в моменты прохождения маятником положения равновесия подвес двигался вверх и пересекал свое среднее положение.

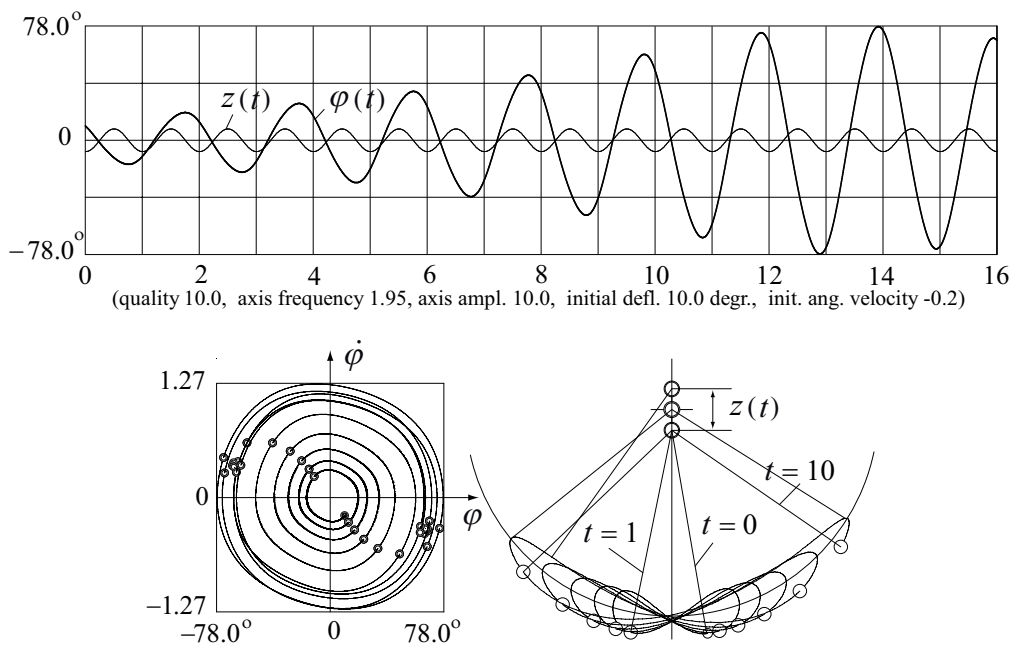


Рис. 2: График угла отклонения, фазовая траектория (с сечениями Пуанкаре) и траектория груза маятника в пространстве при параметрическом резонансе. Шкала времени проградуирована в периодах принудительных осцилляций подвеса.

Увеличение энергии маятника происходит за счет работы, совершаемой источником, возбуждающим осцилляции подвеса. Размах колебаний растет, если вложение энергии за период превосходит потери из-за трения, т.е. когда амплитуда принудительных осцилляций подвеса превосходит некоторое пороговое значение. В отличие от обычного резонанса, возбуждаемого прямым воздействием периодической силы и происходящего при совпадении ее частоты с собственной частотой маятника, при параметрическом резонансе трение не в состоянии ограничить рост амплитуды. Размах установившихся колебаний маятника оказывается конечным из-за того, что с ростом амплитуды в этой нелинейной системе возрастает период собственных колебаний. При неизменном периоде осцилляций точки подвеса возрастание собственного периода приводит к нарушению условий параметрического резонанса. Амплитуда начинает убывать, условия резонанса снова восстанавли-

ваются, что опять приводит к росту амплитуды, и так далее. Из-за трения такие переходные биения постепенно затухают, и в конце концов устанавливаются периодические колебания неизменного размаха.

В нижней части рис. 2 слева приведена фазовая траектория резонансной раскочки маятника. Сечения Пуанкаре на ней показывают состояние маятника в моменты времени, когда осциллирующий подвес находится в крайнем нижнем положении. В процессе установления колебаний раскручивающаяся фазовая траектория приближается к замкнутой кривой — предельному циклу, соответствующему периодическому процессу, а множество сечений Пуанкаре стягивается к двум неподвижным точкам на фазовой плоскости. Внизу справа на рис. 2 показана траектория груза маятника в пространстве для процесса параметрической раскочки.

Показанные на рис. 2 график и фазовая траектория получены численным интегрированием дифференциального уравнения для угла отклонения $\varphi(t)$ маятника с осциллирующим подвесом. В это уравнение, наряду с моментом силы тяжести mg (g — ускорение свободного падения), включен момент силы инерции $F_{\text{in}}(t)$, который явно зависит от времени t :

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{a}{l}\omega^2 \cos \omega t\right) \sin \varphi = 0. \quad (3)$$

Второй член в (3) учитывает момент силы трения, который в этой модели принят пропорциональным мгновенному значению угловой скорости маятника $\dot{\varphi}$. Постоянная затухания γ обратно пропорциональна добротности Q , которую обычно используют для характеристики затухания малых собственных колебаний под действием вязкого трения: $Q = \omega_0/2\gamma$, где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ — частота собственных колебаний предельно малой амплитуды в отсутствие осцилляций подвеса.

Отметим, что колебания около перевернутого положения можно формально описывать тем же самым дифференциальным уравнением (3) с отрицательными значениями g . Иными словами, в уравнении (3) ускорение свободного падения g можно рассматривать как управляющий параметр, изменение которого физически эквивалентно изменению действующей на маятник силы тяжести. Когда этот параметр уменьшается до нуля и дальше в область отрицательных значений, не зависящий от времени (обусловленный силой тяжести) момент в уравнении (3) сначала обращается в нуль, а затем изменяет знак на противоположный. Подобная обращенная по направлению «сила тяжести» стремится привести маятник в перевернутое положение $\varphi = \pi$, отчего (в отсутствие вибраций подвеса) оно становится устойчивым, а положение $\varphi = 0$ — неустойчивым: при $g < 0$ верхнее положение маятника в уравнении (3) эквивалентно нижнему положению при положительном значении g .

3 Динамическая стабилизация перевернутого маятника

Для физического объяснения эффекта динамической стабилизации перевернутого маятника при быстрых осцилляциях подвеса нужно принять во внимание действие на маятник силы инерции, усредненное по периоду этих быстрых осцилляций. Согласно формуле (2) сила инерции изменяется со временем по синусоидальному за-

кону, её среднее за период значение равно нулю. Но оказывается, что среднее значение *момента* этой силы относительно оси вращения маятника отлично от нуля. Именно средний момент силы инерции отвечает за необычное, противоречащее нашей интуиции поведение маятника.

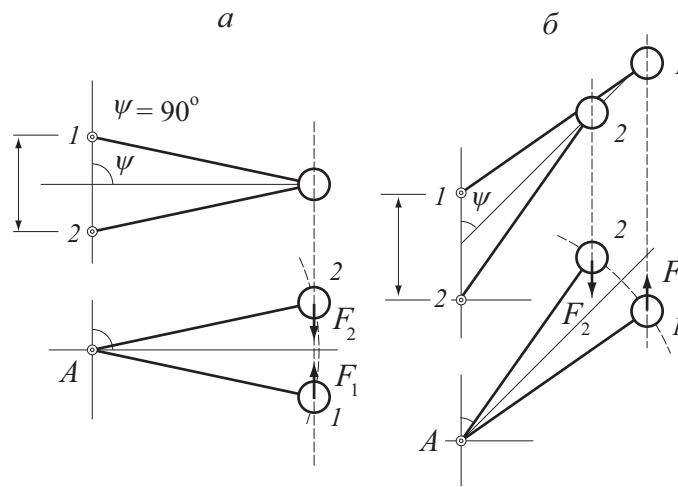


Рис. 3: Силы инерции F_1 и F_2 , действующие на маятник в неинерциальной системе отсчета, в моменты времени, когда осциллирующая ось A находится в крайних положениях 1 и 2 соответственно.

Чтобы было проще понять влияние силы инерции на маятник, забудем на некоторое время о силе тяжести. Начнем наш анализ со случая, когда стержень маятника отклонен в горизонтальное положение, т.е. ориентирован под прямым углом $\psi = \pi/2$ к направлению осцилляций подвеса (см. рис. 3,а). Если начальная скорость груза равна нулю, то в инерциальной системе отсчета в отсутствие силы тяжести он будет оставаться на том же уровне, в то время как ось A осциллирует между крайними точками 1 и 2 . При этом стержень маятника поворачивается вниз и вверх на небольшой угол, как показано в верхней части рис. 3,а. В неинерциальной системе отсчета, связанной с осью маятника, это же движение стержня маятника показано в нижней части рис. 3,а: груз маятника движется вверх-вниз по дуге и оказывается в крайних точках, когда ось занимает положения 1 и 2 . В положении 1 приложенная к грузу сила инерции F_1 направлена вверх, а в другом крайнем положении 2 такая же по величине сила F_2 направлена вниз. Плечо силы инерции в положениях 1 и 2 одинаково, поэтому момент этой силы, усредненный за период осцилляций оси, равен нулю. Это значит, что в отсутствие силы тяжести такая ориентация стержня маятника (перпендикулярно к направлению осцилляций оси) соответствует положению динамического равновесия (неустойчивому, как будет показано ниже).

Теперь рассмотрим случай, когда стержень маятника в среднем отклонен на произвольный угол ψ от направления осцилляций подвеса. Пусть ось A перемещается между крайними точками 1 и 2 , как показано в верхней части рис. 3,б. В неинерциальной системе отсчета, связанной с подвесом, груз маятника движется вверх-вниз по дуге, центр которой совпадает с осью A . Груз оказывается в крайних точках, когда ось занимает положения 1 и 2 , как показано в нижней части рис. 3,б.

Отметим, что мгновенная ориентация стержня маятника в момент 1 одинакова в обеих системах отсчета. В момент 2 (как и в любой другой момент) ориентация стержня также одинакова. Когда ось смещена вверх (в точку 1) из своего среднего положения, действующая на груз маятника сила инерции F_1 также направлена вверх. В другом крайнем положении 2 сила инерции F_2 направлена вниз. Силы инерции F_1 и F_2 в крайних положениях оси одинаковы по величине, но *момент* силы инерции F_1 в положении 1 больше, чем момент силы инерции F_2 в положении 2 , поскольку *плечо* силы F_1 больше, чем силы F_2 . Это легко видеть из рис. 3,б. Поэтому в среднем за период осцилляций оси сила инерции создает момент, который стремится повернуть маятник вверх, в вертикальное перевернутое положение, в котором стержень маятника ориентирован вдоль направления осцилляций оси. Если бы стержень маятника был отклонен на некоторый (острый) угол от нижнего вертикального положения, то средний момент силы инерции стремился бы повернуть стержень маятника вниз.

Таким образом, момент силы инерции, усредненный по периоду быстрых осцилляций оси, стремится установить стержень маятника по направлению принудительных колебаний подвеса. П.Л. Капица (см. [2], [3]) назвал этот ориентирующий момент *вибрационным*, но в равной мере справедливо называть этот момент *инерционным*, потому что его происхождение обусловлено силой инерции, возникающей в связанной с подвесом системе отсчета из-за быстрых осцилляций оси маятника. Именно средний момент силы инерции дает наглядное объяснение существованию двух устойчивых положений равновесия маятника, соответствующих его ориентации вдоль направления колебаний оси. При заданных значениях частоты и амплитуды колебаний подвеса этот средний момент, как и момент силы тяжести, зависит только от угла отклонения маятника. В поле тяжести перевернутый маятник устойчив по отношению к малым отклонениям от вертикали при условии, что средний момент силы инерции больше, чем опрокидывающий момент силы тяжести.

4 Приближенная количественная теория перевернутого маятника

На основе приведенной выше наглядной картины можно сформулировать количественный критерий динамической стабилизации перевернутого маятника. При быстрых осцилляциях точки подвеса движение маятника можно представить, следуя П.Л. Капице [2]-[3], как суперпозицию двух компонент: медленного движения, для которого характерно малое изменение угла ориентации стержня за период вынужденных осцилляций оси, и быстрого («вибрационного») движения. Можно представить себе наблюдателя, который не замечает мелкомасштабную и малозаметную для глаза вибрационную составляющую этого составного движения (или не хочет замечать, см. [5]). Если такой наблюдатель будет использовать стробоскопическое освещение с интервалом между вспышками, равным периоду осцилляций подвеса, он сможет видеть только медленную компоненту движения маятника. Наша задача как раз и состоит в нахождении этой медленной компоненты.

Когда стержень маятника отклонен от нижнего положения равновесия в среднем на угол ψ , мгновенное значение угла отклонения $\varphi(t)$ из-за принудительных

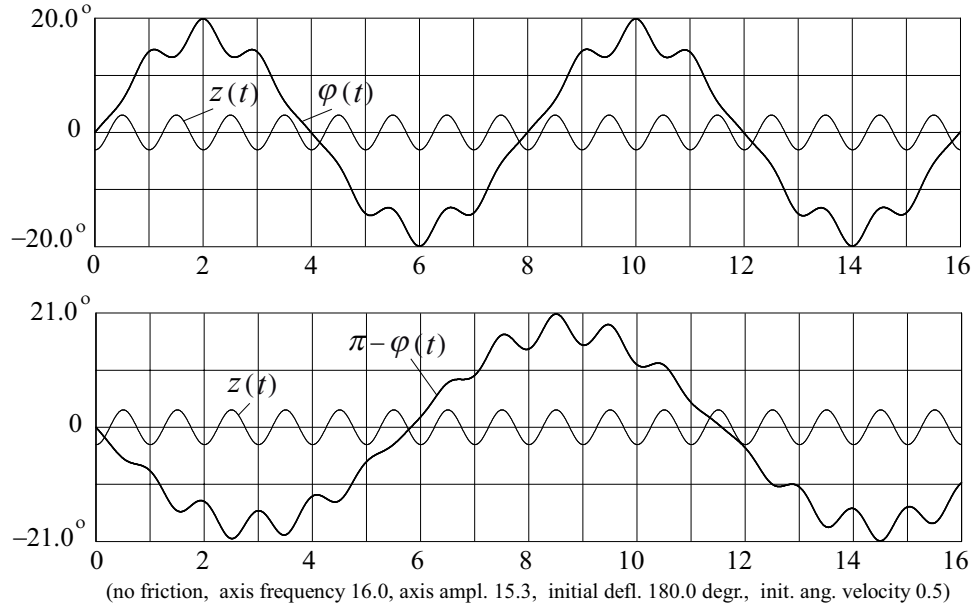


Рис. 4: Графики угла отклонения $\varphi(t)$ при колебаниях маятника около нижнего и верхнего положений равновесия вместе с графиком $z(t) = -a \cos \omega t$ вынужденных осцилляций оси. Графики получены численным интегрированием дифференциального уравнения (3).

осцилляций оси подвержено быстрым синусоидальным колебаниям с частотой ω около этого среднего значения $\psi = \langle \varphi(t) \rangle$. Это ясно видно из графиков зависимости угла отклонения $\varphi(t)$ от времени, показанных ниже на рис. 4. Поэтому можно искать мгновенное значение угла отклонения $\varphi(t)$ как сумму медленно изменяющейся функции $\psi(t)$ и быстрого слагаемого $\delta(t)$, среднее значение которого равно нулю. Быстрый член $\delta(t)$ совершает колебания с высокой частотой ω принудительных колебаний оси. Как видно из рис. 3,б, угловая амплитуда этих быстрых колебаний пропорциональна синусу среднего угла отклонения ψ :

$$\varphi(t) = \psi(t) + \delta(t) = \psi(t) - \frac{z(t)}{l} \sin \psi = \psi(t) - \frac{a}{l} \sin \psi \cos \omega t. \quad (4)$$

Здесь использовано выражение (1) для мгновенного положения оси $z(t)$, в котором a — амплитуда принудительных колебаний оси, l — длина маятника. Знак второго слагаемого в (4) объясняется тем, что когда ось находится выше своего среднего положения, т.е. значение z положительно, дополнительный угол $\delta = -(z/l) \sin \psi$ отрицателен, и наоборот. Ниже мы получим дифференциальное уравнение для искомой медленно изменяющейся функции $\psi(t)$, которая описывает движение маятника, усредненное по периоду быстрых осцилляций.

Момент силы инерции зависит от ее мгновенного значения $m a \omega^2 \cos \omega t$ (см. (2)) и от синуса угла φ . Осцилляции оси приводят лишь к небольшим отклонениям угла φ от его среднего значения ψ (т.е. $\delta(t) \ll 1$ для любого t), поэтому для синуса угла φ можно написать следующее приближенное выражение:

$$\sin \varphi = \sin(\psi + \delta) \approx \sin \psi + \delta \cos \psi. \quad (5)$$

Используя это выражение и считая ψ практически неизменным на протяжении периода осцилляций оси, находим приближенное значение момента силы тяжести относительно оси маятника, усредненное по периоду быстрых осцилляций оси:

$$\langle -mgl \sin \varphi \rangle = -mgl \langle \sin(\psi + \delta) \rangle = -mgl \sin \psi. \quad (6)$$

Здесь учтено, что среднее значение $\delta(t)$ равно нулю: $\langle \delta(t) \rangle = 0$. Таким образом, среднее значение момента силы тяжести будет таким же, как в случае неподвижного подвеса: второй (осциллирующий) член в выражении (4) для мгновенного значения угла отклонения, будучи умноженным на постоянную (не зависящую от времени) силу тяжести, не дает вклада в средний момент сил. Напротив, при усреднении по времени момента осциллирующей силы инерции вклад первого члена разложения (4) обращается в нуль, но второй член дает ненулевой вклад в средний момент. Так происходит благодаря одинаковой синусоидальной зависимости от времени как $\delta(t)$, так и силы инерции $F_{\text{in}}(t)$ (см. (2)):

$$\begin{aligned} \langle F_{\text{in}}(t)l \sin(\psi + \delta) \rangle &= -ma\omega^2 l (a/l) \cos \psi \sin \psi \langle \cos^2 \omega t \rangle = \\ &= -\frac{1}{2}ma^2\omega^2 \cos \psi \sin \psi = -\frac{1}{4}ma^2\omega^2 \sin 2\psi. \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) учтено, что среднее за период значение квадрата косинуса равно $1/2$. В случае $\psi > \pi/2$ средний момент силы инерции положителен: когда маятник образует острый угол с направлением вверх, этот момент стремится повернуть стержень маятника в перевернутое положение. Сравнивая правые части выражений (6) и (7), можно найти условие, при котором момент силы инерции, действующий на отклоненный из перевернутого положения маятник, превосходит момент силы тяжести, стремящейся привести маятник в нижнее положение:

$$a^2\omega^2 > 2gl. \quad (8)$$

Таким образом, перевернутое положение маятника устойчиво, если максимальная скорость ωa осциллирующей оси больше, чем скорость $\sqrt{2gl}$, которую тело, свободно падающее в поле тяжести, приобретает при падении с высоты, равной длине маятника l . Критерий устойчивости перевернутого маятника (8) можно представить в другой форме, если воспользоваться выражением $\omega_0^2 = g/l$ для частоты малых собственных колебаний маятника (в отсутствие осцилляций подвеса). Подставляя $g = l\omega_0^2$ в (8), получаем:

$$\frac{a}{l} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2}. \quad (9)$$

Согласно критерию (9), произведение безразмерной относительной амплитуды a/l и относительной частоты ω/ω_0 осцилляций подвеса должно превышать $\sqrt{2}$. Например, для маятника длиной $l = 20$ см при частоте вибраций оси $f = \omega/2\pi = 100$ Гц амплитуда a этих вибраций должна превышать 3.2 мм. Для физического маятника критерий динамической стабилизации перевернутого положения дается такими же выражениями (8) или (9), если в них в качестве l подставлять приведенную длину маятника I/md , где I — момент инерции относительно оси вращения, m — масса маятника и d — расстояние от оси вращения до центра масс.

При малых относительных амплитудах a/l и высоких относительных частотах ω/ω_0 осцилляций подвеса критерий (9) согласуется с нижней границей устойчивости перевернутого маятника, которую можно найти путем аппроксимации нелинейного дифференциального уравнения движения маятника (3) уравнением Маттье, свойства решений которого детально описаны в обширной литературе по этой проблеме (см., например, [9], [10] или [11]). Однако исследования, основанные на уравнении Маттье, диаграммах Айнса—Стрэтта и бесконечных детерминантах Хилла, представляются неоправданно сложными для решения данной задачи. Кроме того, они не дают ясной физической картины динамической стабилизации перевернутого маятника и, что более важно, применимы лишь при малых углах отклонения от вертикали. Напротив, предложенный П.Л. Капицей подход, основанный на разделении быстрого и медленного движений маятника, дает очень простое и наглядное объяснение этому неожиданному явлению. Подчеркнем, что он применим лишь при достаточно высокой частоте и малой амплитуде осцилляций подвеса, но свободен от ограничения малыми отклонениями маятника. Уточненный критерий динамической стабилизации перевернутого маятника, справедливый при произвольных значениях частоты и амплитуды возбуждения, приведен ниже при анализе условий возникновения субгармонических резонансов (см. выражение (24) на стр. 20).

Для заданных значений частоты ω и амплитуды a осцилляций подвеса, при которых выполнено условие (8) или (9), можно найти максимально допустимое значение среднего отклонения маятника от перевернутого положения $\theta_{\max} = \pi - \psi_0$, в пределах которого маятник будет возвращаться в перевернутое положение. Для этого достаточно приравнять правые части выражений (6) и (7), которые определяют средний момент силы тяжести, стремящийся опрокинуть маятник, и средний момент силы инерции, стремящийся вернуть маятник в перевернутое положение:

$$\cos \theta_{\max} = -\cos \psi_0 = \frac{2gl}{a^2\omega^2} = 2 \left(\frac{\omega_0 l}{\omega a} \right)^2. \quad (10)$$

Чем больше произведение ωa частоты и амплитуды осцилляций подвеса, тем ближе к $\pi/2$ максимально допустимое отклонение маятника θ_{\max} от перевернутого положения. Если маятник отклонить на угол, меньший θ_{\max} , маятник будет совершать сравнительно медленные колебания около перевернутого положения. Это медленное движение происходит в результате совместного действия среднего момента силы инерции и силы тяжести. На медленное движение маятника налагаются быстрые колебания с частотой вынужденных осцилляций подвеса (рис. 4).

Аналогичное поведение маятника наблюдается и при отклонении от нижнего положения равновесия. Но в этом случае частота медленных колебаний маятника больше, чем около перевернутого положения. Действительно, ведь в этом случае и средний момент силы инерции, и момент силы тяжести стремятся вернуть маятник в нижнее положение. Частота колебаний маятника около нижнего положения увеличивается благодаря осцилляциям подвеса. Как отмечал П.Л. Капица [2] – [3], маятниковые часы на вибрирующем основании всегда спешат.

5 Эффективный потенциал для медленного движения маятника

Приближенное дифференциальное уравнение для медленной компоненты движения $\psi(t)$ в неинерциальной системе отсчета, связанной с осью, можно написать в предположении, что угловое ускорение маятника $\ddot{\psi}(t)$ в этом медленном движении определяется суммарным моментом $N(\psi)$ действующих на маятник сил, усредненным по периоду быстрых осцилляций оси. Учитывая моменты силы тяжести $mg \sin \psi$ и силы инерции (2), получаем:

$$\ddot{\psi} = -\omega_0^2 \sin \psi - \frac{1}{2} \frac{a^2}{l^2} \omega^2 \cos \psi \sin \psi. \quad (11)$$

Средний момент сил в правой части (11) рассчитан приближенно в предположении, что медленно изменяющаяся координата $\psi(t)$ «заморожена».

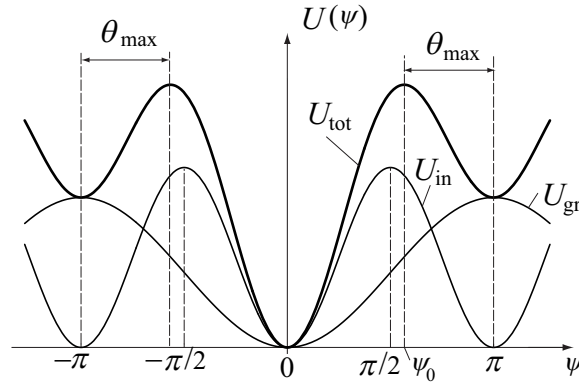


Рис. 5: Графики потенциальной энергии в поле тяжести $U_{\text{gr}}(\psi)$, потенциальной энергии $U_{\text{in}}(\psi)$, соответствующей моменту средней силы инерции, и полной потенциальной энергии $U(\psi) = U_{\text{tot}}(\psi)$ для маятника с осциллирующим подвесом.

Для наглядности медленное движение маятника $\psi(t)$, которое только и видит упоминавшийся выше наблюдатель, не замечающий малых быстрых осцилляций, удобно представлять как движение частицы в эффективном потенциальном поле, описываемом функцией $U = U(\psi)$, такой, что момент сил $N(\psi) = -dU(\psi)/d\psi$. Впервые такой эффективный потенциал был предложен Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем [4] и впоследствии вводился разными методами в других исследованиях (см, например, [12], [13] или [14]). Эффективный потенциал состоит из двух частей: $U_{\text{gr}}(\psi)$ и $U_{\text{in}}(\psi)$, описывающих соответственно действие силы тяжести и средней силы инерции:

$$U(\psi) = U_{\text{gr}}(\psi) + U_{\text{in}}(\psi) = mgl(1 - \cos \psi) + \frac{1}{4} ma^2 \omega^2 (1 - \cos 2\psi). \quad (12)$$

Графики $U_{\text{gr}}(\psi)$ и $U_{\text{in}}(\psi)$ показаны на рис. 5. Оба графика имеют синусоидальную форму, но период $U_{\text{in}}(\psi)$ вдвое меньше периода $U_{\text{gr}}(\psi)$. Их минимумы при $\psi = 0$ совпадают, образуя абсолютный минимум полной функции $U(\psi) = U_{\text{tot}}(\psi)$. Этот минимум соответствует нижнему устойчивому положению равновесия маятника.

Но соседний минимум $U_{\text{in}}(\psi)$ расположен при $\psi = \pi$, где $U_{\text{gr}}(\psi)$ имеет максимум, соответствующий перевернутому маятнику.

Если выполняется критерий устойчивости перевернутого маятника (8) или (9), полный потенциал $U = U(\psi)$ (12) имеет (помимо абсолютного минимума при $\psi = 0$, соответствующего нижнему положению равновесия) относительные минимумы при $\psi = \pm\pi$. Эти дополнительные минимумы соответствуют перевернутому положению маятника. Колебания частицы, захваченной в таком минимуме, описывают поведение маятника в окрестности перевернутого положения.

Медленные колебания малой амплитуды, происходящие вблизи дна каждой из этих потенциальных ям, будут почти гармоническими. Выражения для частот малых колебаний в этих ямах можно найти из дифференциального уравнения (11) для медленного движения, положив в нем $\sin \psi \approx \psi$, $\cos \psi \approx 1$ при малых колебаниях около $\psi = 0$ и $\sin \psi = \sin(\pi - \theta) \approx \theta$, $\cos \psi \approx -1$ при малых колебаниях около $\psi = \pm\pi$:

$$\ddot{\psi} = -(\omega_0^2 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{l^2} \omega^2) \psi, \quad \ddot{\theta} = -(-\omega_0^2 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{l^2} \omega^2) \theta. \quad (13)$$

Из (13) следует, что частоты ω_{down} и ω_{up} колебаний маятника соответственно около нижнего ($\psi = 0$) и верхнего ($\psi = \pm\pi$) положений равновесия при малом размахе этих колебаний даются следующими выражениями:

$$\omega_{\text{down}}^2 = \frac{a^2 \omega^2}{2l^2} + \omega_0^2, \quad \omega_{\text{up}}^2 = \frac{a^2 \omega^2}{2l^2} - \omega_0^2. \quad (14)$$

Склоны мелких дополнительных минимумов имеют меньшую крутизну, чем склоны основного минимума. Поэтому частота ω_{up} медленных колебаний около перевернутого положения ниже частоты ω_{down} малых колебаний около нижнего положения равновесия.

Выражения (14) для частот медленных колебаний ω_{up} и ω_{down} иллюстрируются графиками на рис. 4, полученными с помощью численного интегрирования уравнения (3). Для наглядности выбран пример, в котором частота возбуждения $\omega = 16\omega_0$, а амплитуда $a = 0.153l$, так что $(a^2/2l^2)\omega^2 = 3.0\omega_0^2$. В этом случае выражения (14) дают для частоты медленных колебаний около нижнего положения значение $\omega_{\text{down}} = 2\omega_0$, ровно вдвое превышающее собственную частоту. Тогда период медленных колебаний T_{down} должен быть вдвое меньше периода T_0 собственных колебаний маятника в отсутствие осцилляций оси. Из рис. 4 видно, что маятник совершает ровно два медленных колебания на протяжении периода T_0 , который в этом примере (при $\omega = 16\omega_0$) составляет 16 периодов $T = 2\pi/\omega$ принудительных осцилляций оси. Шкала времени на графиках проградуирована в единицах T .

Для частоты медленных колебаний около перевернутого положения выражения (14) дают значение $\omega_{\text{up}} = \sqrt{2}\omega_0$, т.е. период медленных колебаний $T_{\text{up}} = T_0/\sqrt{2}$. Это значение периода также хорошо подтверждается нижним графиком на рис. 4.

Графики на рис. 4 показывают, что медленное движение маятника наиболее сильно искажено высокочастотными колебаниями вблизи крайних отклонений маятника. Искажения графиков $\varphi(t)$ сравнительно невелики, когда маятник пересекает положение равновесия. Такое поведение согласуется с выражением (4), согласно которому угловая амплитуда быстрых колебаний стержня маятника пропорциональна синусу среднего угла отклонения ψ , характеризующего медленную составляющую движения.

Если в формулах (14) положить $\omega_0 = 0$, мы получим выражение для частоты ω_{slow} малых медленных колебаний маятника с осциллирующим подвесом в отсутствие силы тяжести:

$$\omega_{\text{slow}} = \omega \frac{a}{\sqrt{2l}}. \quad (15)$$

Такие колебания могут происходить около каждого из двух динамически стабилизированных положений равновесия, симметрично расположенных в противоположных направлениях на линии осцилляций оси маятника. Когда осцилляции оси происходят при наличии силы тяжести, момент силы тяжести добавляется к среднему моменту силы инерции. Результирующий возвращающий момент вблизи нижнего положения возрастает, что приводит к увеличению соответствующей частоты медленных колебаний ω_{down} по сравнению с ω_{slow} . Вблизи верхнего положения сила тяжести уменьшает средний возвращающий момент силы инерции, уменьшая тем самым частоту ω_{up} медленных колебаний перевернутого маятника.

Положения максимумов потенциальной энергии $U = U(\psi)$ определяются формулами (10). Вершины потенциальных барьеров между соседними ямами соответствуют отклонениям $\pm\psi_0$ ($\psi_0 > \pi/2$) от нижнего вертикального положения и $\pm\theta_{\text{max}}$ ($\theta_{\text{max}} < \pi/2$) от верхнего (перевернутого) положения (рис. 5). При таких отклонениях средний момент силы тяжести уравновешен средним моментом силы инерции. Однако эти положения равновесия неустойчивы: при малейшем возмущении маятник медленно соскальзывает в одну из потенциальных ям и совершает в ней колебания, двигаясь от одного склона до другого. Форма таких колебаний сильно отличается от синусоидальной: маятник надолго задерживается вблизи вершины потенциального барьера (вблизи максимального отклонения), затем довольно быстро проходит над дном потенциальной ямы и медленно взбирается на противоположный склон перед тем, как начать обратное движение.

Полученные здесь приближенные результаты справедливы при достаточно высокой частоте $\omega \gg \omega_0$ и малой амплитуде $a \ll l$ вынужденных осцилляций подвеса. Из графика $U = U(\psi)$ (рис. 5) следует, что нижнее положение равновесия всегда устойчиво, а верхнее перевернутое положение устойчиво, когда на кривой потенциальной энергии $U = U(\psi)$ существуют дополнительные минимумы при $\psi = \pm\pi$, т.е. при выполнении условия (8) или (9). Более точный критерий динамической стабилизации перевернутого маятника будет получен ниже при анализе субгармонических резонансов высших порядков.

Как уже отмечалось выше, в определенных интервалах значений параметров системы (интервалах параметрической неустойчивости) нижнее положение равновесия маятника становится неустойчивым, что никак не вытекает из приведенного здесь исследования. Ниже будет показано, что и верхнее (динамически стабилизированное) положение тоже может стать неустойчивым: при достаточно большой амплитуде осцилляций подвеса возбуждаются колебания перевернутого маятника с периодом, вдвое большим вынуждающего периода. Эта так называемая флаттер-мода колебаний родственна основному параметрическому резонансу неперевернутого маятника. Подчеркнем, что параметрический резонанс, флаттер-мода и другие более сложные примеры поведения маятника, рассматриваемые ниже, имеют место при таких значениях частоты и амплитуды осцилляций подвеса, при которых наглядный метод разделения движения на быструю и медленную составляющие неприменим.

6 Субгармонические резонансы высших порядков

Ограниченная применимость подхода, основанного на разделении быстрых и медленных движений, означает, что мы не вправе ожидать от него исчерпывающего описания поведения маятника с осциллирующим подвесом во всех случаях. Тем не менее, представление об эффективном потенциале для медленной компоненты движения позволяет нам получить наглядное представление о некоторых необычных особенностях изучаемой физической системы, включая субгармонические резонансы и такие сугубо нелинейные свойства, как зависимость периода медленных колебаний от амплитуды.

Когда частота и амплитуда вынужденных осцилляций подвеса лежат в определенных интервалах, маятник, вместо совершения затухающих колебаний и постепенного приближения к положению равновесия (динамически стабилизированному верхнему или обычному нижнему), может оказаться захваченным в n -периодический предельный цикл. Один период таких незатухающих колебаний маятника оказывается равным в точности n циклам осцилляций подвеса. Жесткая связь фаз установившихся колебаний маятника и осцилляций подвеса («фазовый захват») обеспечивает постоянную «подпитку» маятника энергией для компенсации потерь на трение. Фазовая траектория замыкается после завершения n периодов возбуждения T . Поскольку период таких колебаний маятника равен nT , а частота основной гармоники составляет $1/n$ от частоты возбуждения, это явление можно назвать *субгармоническим резонансом n -го порядка*.

Периодические колебания такого типа около динамически стабилизированного перевернутого положения были впервые описаны в 1995 году Д. Ачесоном [9], который назвал их “multiple-nodding oscillations,” что можно перевести как «колебания с несколькими кивками». Компьютерное моделирование показывает, что движение маятника при этом напоминает своеобразный танец. В действительности такие колебания с «пританцовыванием» могут происходить и около нижнего положения равновесия, а также и в отсутствие силы тяжести около каждого из двух эквивалентных динамически стабилизированных положений равновесия [14]. Пример стационарных колебаний в отсутствие силы тяжести, период которых равен 8 циклам осцилляций подвеса, приведен на рис. 6.

На рис. 6 вверху слева показана пространственная траектория груза маятника, внизу слева — замкнутая петлеобразная фазовая траектория на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$. Справа показаны графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ и их гармонических составляющих, а также графики осцилляций подвеса. В спектре доминирует основная гармоника с частотой $\omega/8$, период которой равен 8 периодам подвеса. Её можно рассматривать как субгармонику осцилляций подвеса. Именно эта гармоника описывает плавную компоненту $\psi(t)$ составного 8-периодического движения маятника.

Покажем, что приближенный подход к описанию медленного движения, основанный на эффективном потенциале $U_{\text{tot}}(\psi)$ (см. рис. 5), дает простое качественное объяснение такому необычному на первый взгляд и противоречащему интуиции поведению маятника. Более того, для субгармонических резонансов высоких порядков с $n \gg 1$ этот подход обеспечивает неплохое количественное согласие. В самом деле, естественно предположить, что захват маятника в субгармонический резонанс порядка n может произойти, если период медленного (слабо затухающего) собственного колебательного движения вблизи минимума эффективного по-

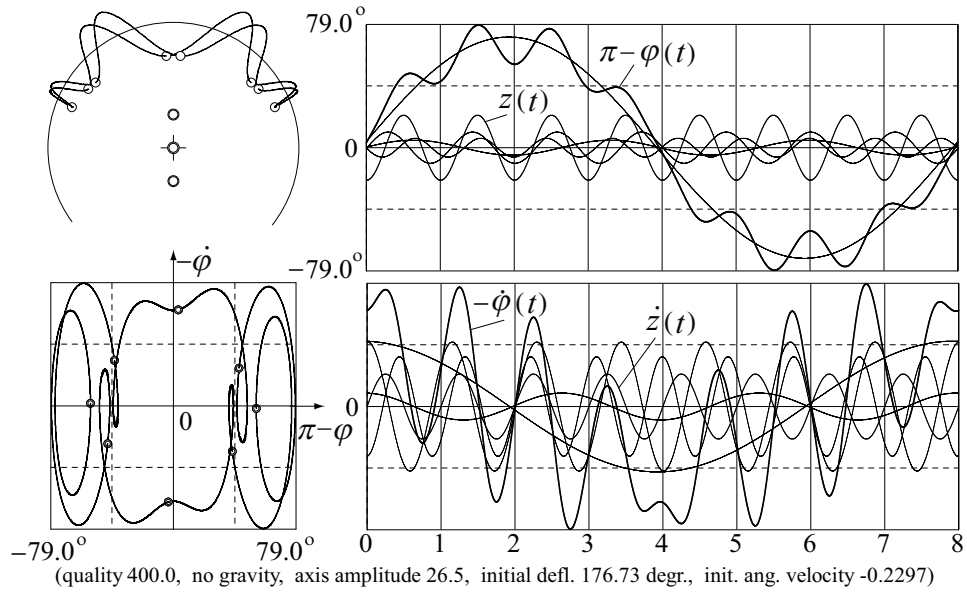


Рис. 6: Траектория в пространстве, фазовая траектория с сечениями Пуанкаре и графики стационарных колебаний для субгармонического резонанса 8-го порядка. Тонкими линиями показаны графики отдельных гармоник. В спектре доминирует основная гармоника с частотой $\omega/8$. Амплитуды 7-й и 9-й гармоник почти одинаковы.

тенциала составляет приблизительно n периодов возбуждения, т.е. когда частота возбуждения ω близка к целому кратному n частоты собственных медленных колебаний либо вблизи перевернутого, либо нижнего положения равновесия: $\omega = n\omega_{\text{up}}$ или $\omega = n\omega_{\text{down}}$. В таких условиях может произойти синхронизация (фазовый захват) колебаний маятника и осцилляций подвеса, так что один цикл медленного движения будет *в точности* совпадать с n периодами возбуждения, и весь процесс станет строго периодическим.

В качестве примера рассмотрим вначале частный случай маятника с вибрирующим подвесом в отсутствие силы тяжести или, что в сущности то же самое, предельный случай очень высокой частоты возбуждения $\omega \gg \omega_0$ ($\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$). В этом предельном случае оба положения равновесия (обычное и перевернутое) эквивалентны, и относительная амплитуда осцилляций подвеса $m = a/l$ становится единственным физическим параметром, определяющим искомое условие возможности субгармонического резонанса порядка n . При $\omega_0 = 0$ (т.е. в отсутствие силы тяжести) частота медленных колебаний, согласно (15), равна $\omega_{\text{slow}}/\omega = m/\sqrt{2}$. Отсюда для минимального (порогового) значения относительной амплитуды, при котором один период медленного движения составляет n циклов возбуждения, получаем:

$$m_{\min} = \sqrt{2} \frac{\omega_{\text{slow}}}{\omega} = \sqrt{2}/n. \quad (16)$$

Для субгармонического резонанса 8 порядка (рис. 6) $n = 8$ и (16) дает $m_{\min} = \sqrt{2}/8 = 0.177$. Это значение достаточно хорошо совпадает с результатами моделирующего эксперимента в случае малых колебаний ($m = a/l = 0.173$) и с предсказанием порога данной моды в рамках более точной теории, основанной на ли-

неаризованном дифференциальном уравнении системы (см. уравнение (21) ниже), которое при $n = 8$ дает для относительной амплитуды то же значение $a/l = 0.173$.

Медленные n -периодические колебания большого размаха, когда отклонения маятника простираются за пределы параболической части эффективного потенциала (см. рис. 5), захватывая его пологие склоны, уже не будут гармоническими и характеризуются увеличенным периодом по сравнению с малыми колебаниями вблизи дна потенциальной ямы. Поэтому для наблюдения больших колебаний требуются значительно бóльшие значения амплитуды осцилляций подвеса. В частности, показанные на рис. 6 колебания с амплитудой 80° происходят при $a/l = 0.265$ (сравните с пороговым значением $a/l = 0.173$). Зависимость размаха колебаний от превышения над порогом обсуждается ниже.

При наличии силы тяжести для нахождения минимальной относительной амплитуды осцилляций подвеса, необходимой для возбуждения субгармонического резонанса n -го порядка, нужно положить $\omega_{\text{down, up}} = \omega/n$ (т.е. n циклов возбуждения должны укладываться на протяжении одного периода медленных колебаний). Используя выражения (14) для $\omega_{\text{down, up}}$, получаем пороговые значения m_{min} соответственно для нижнего и перевернутого положений:

$$m_{\text{min}} = \sqrt{2 \left(\frac{1}{n^2} \mp \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}. \quad (17)$$

Минимальная амплитуда осцилляций подвеса, обеспечивающая динамическую стабилизацию перевернутого маятника, получается из (17) в предельном случае $n \rightarrow \infty$: $m_{\text{min}} = \sqrt{2}\omega_0/\omega$. Это выражение совпадает с полученным выше приближенным критерием (9) стабилизации перевернутого маятника.

7 Спектр и границы субгармонических колебаний

В условиях субгармонического резонанса n -го порядка медленная компонента движения маятника $\psi(t)$, как хорошо видно из рис. 6, имеет практически синусоидальную зависимость от времени с частотой ω/n : $\psi(t) = A \sin(\omega t/n)$. При небольших превышениях амплитуды осцилляций подвеса над пороговым значением размах колебаний маятника мал, что позволяет заменить $\sin \psi$ на ψ в выражении (4) для мгновенного значения угла отклонения $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) \approx \psi(t) - (a/l) \sin \psi(t) \cos \omega t \approx \psi(t) - m\psi(t) \cos \omega t, \quad m = a/l. \quad (18)$$

Это значит, что спектр n -периодических колебаний малой амплитуды состоит из основной гармоники $A \sin(\omega t/n)$ с частотой ω/n и двух высших гармоник порядков $n - 1$ и $n + 1$ с равными амплитудами:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A \sin\left(\frac{\omega}{n}t\right) - mA \sin\left(\frac{\omega}{n}t\right) \cos \omega t \\ &= A \sin\left(\frac{\omega}{n}t\right) + \frac{mA}{2} \sin\left(\frac{n-1}{n}\omega t\right) - \frac{mA}{2} \sin\left(\frac{n+1}{n}\omega t\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Такой спектральный состав в главном подтверждается графиками на рис. 6, полученными численным интегрированием уравнения (3). Доминирующая основная

гармоника с периодом nT ($T = 2\pi/\omega$ — период возбуждения) описывает медленную компоненту движения маятника. Может показаться странным, что гармоника порядка n с частотой возбуждения ω отсутствует в спектре. Однако эта особенность легко объясняется тем, что быстрая компонента $\cos \omega t$ входит в выражение для $\varphi(t)$ умноженной на $\sin \psi(t) \approx \psi(t)$, т.е. имеет медленно изменяющуюся амплитуду, которая меняет знак каждый раз, когда маятник пересекает положение равновесия. Это значит, что колебание с частотой ω не является гармоникой $\varphi(t)$, так как гармоники периодической функции должны иметь постоянные амплитуды.

Когда маятник пересекает положение равновесия, высшие гармоники порядков $n - 1$ и $n + 1$ складываются в противоположных фазах и почти не искажают график плавного движения, описываемого основной гармоникой. В моменты максимальных отклонений маятника фазы высших гармоник совпадают, и здесь эти гармоники вносят наибольшие искажения в медленную компоненту движения.

Согласно уравнению (19) обе высшие гармоники в $\varphi(t)$ имеют равные амплитуды $mA/2$. Однако из графиков на рис. 6 при большом размахе колебаний маятника можно заметить, что эти амплитуды немного различаются. Поэтому можно улучшить приближенное выражение (9) для пробной функции $\varphi(t)$ и теоретическую оценку порога субгармонических резонансов (17), предположив, что более точное решение уравнения (3) характеризуется аналогичным спектром, но с неравными амплитудами A_{n-1} и A_{n+1} высших гармоник (для $n > 2$, случай $n = 2$ будет рассмотрен отдельно):

$$\varphi(t) = A_1 \sin\left(\frac{\omega}{n}t\right) + A_{n-1} \sin\left(\frac{n-1}{n}\omega t\right) + A_{n+1} \sin\left(\frac{n+1}{n}\omega t\right). \quad (20)$$

В условиях порога возбуждения субгармонических резонансов амплитуду колебаний маятника можно считать бесконечно малой, что позволяет в точном уравнении (3) положить $\sin \varphi \approx \varphi$. В результате (3) сводится к уравнению Матье:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + (g/l - m\omega^2 \cos \omega t)\varphi = 0, \quad (m = a/l). \quad (21)$$

Подставляя $\varphi(t)$ из (20) в уравнение (21) с $\gamma = 0$ и выполняя разложение произведений тригонометрических функций, получаем систему приближенных уравнений для амплитуд A_1 , A_{n-1} и A_{n+1} гармоник пробной функции $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} 2(kn^2 - 1)A_1 + mn^2A_{n-1} - mn^2A_{n+1} &= 0, \\ mn^2A_1 + 2[n^2(k-1) + 2n - 1]A_{n-1} &= 0, \\ -mn^2A_1 + 2[n^2(k-1) - 2n - 1]A_{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь использовано обозначение $k = g/(l\omega^2)$. Однородная система уравнений (22) имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю. Это условие дает уравнение для минимального (порогового) значения амплитуды осцилляций подвеса m_{\min} , при которой может существовать n -периодическое движение, описываемое функцией $\varphi(t)$ из (20). Решая уравнение, получаем:

$$m_{\min}^2 = \frac{2 [n^6 k(k-1)^2 - n^4(3k^2 + 1) + n^2(3k + 2) - 1]}{n^4 [n^2(1-k) + 1]}. \quad (23)$$

Относительные амплитуды высших гармоник A_{n-1}/A_1 и A_{n+1}/A_1 для заданного значения n можно найти как решения однородной системы уравнений (22) после подстановки в нее m_{\min} из (23).

Как уже отмечалось, колебаниям около перевернутого положения формально соответствуют отрицательные значения g в уравнениях (3) и (21), как если бы сила тяготения была направлена вверх. Поэтому для перевернутого маятника в (23) нужно положить $k = -g/(l\omega^2) < 0$. Приближенный критерий (9) динамической стабилизации перевернутого маятника через этот параметр k записывается следующим образом: $m_{\min} = a_{\min}/l = \sqrt{-2k}$. Улучшенное значение для m_{\min} по сравнению с этим приближенным критерием можно получить из (23) как предельный случай при $n \rightarrow \infty$:

$$m_{\min} = \sqrt{-2k(1-k)}, \quad k = -g/(l\omega^2) < 0. \quad (24)$$

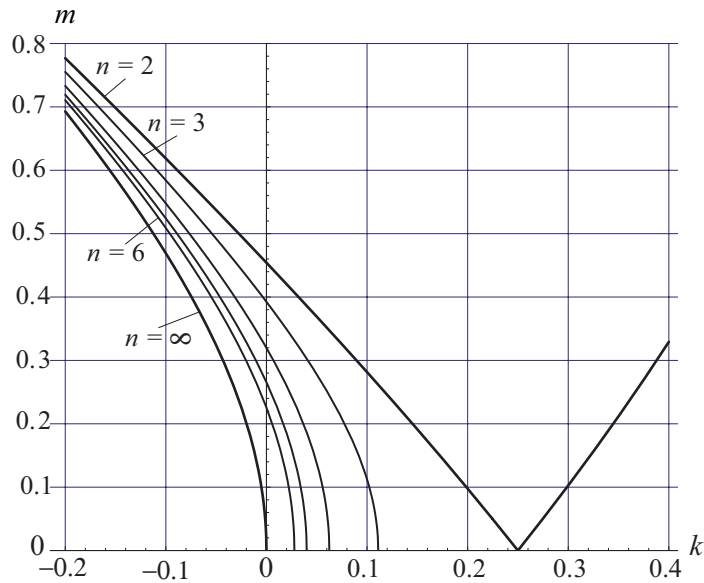


Рис. 7: Относительная амплитуда подвеса $m = a/l$ как функция $k = g/(l\omega^2)$ (квадрата обратной относительной частоты подвеса) на границе области динамической стабилизации перевернутого маятника (левая кривая, обозначенная как $n \rightarrow \infty$) и в условиях порога субгармонических резонансов нескольких порядков n (см. подробности в тексте).

Левая кривая на рис. 7 ($n \rightarrow \infty$), лежащая в области $k < 0$, соответствует критерию (24) динамической стабилизации перевернутого маятника. Она показывает минимальную (пороговую) относительную амплитуду подвеса $m_{\min} = a_{\min}/l$ в зависимости от параметра $k = -g/(l\omega^2)$. Другие кривые, расположенные при $k < 0$ правее этой границы устойчивости, показывают зависимость от k пороговых значений амплитуды подвеса для субгармонических резонансов нескольких порядков перевернутого маятника (начиная с $n = 6$ до $n = 2$ слева направо).¹

Кривая с $n = 2$ на рис. 7 в области $k < 0$ дает верхнюю границу динамической стабилизации перевернутого маятника: как будет показано ниже, при превышении этой границы перевернутый маятник теряет устойчивость и переходит в стационарный режим колебаний с периодом $2T$ (флаттер-мода). Субгармоническим

¹Кривые на рис. 7 построены с помощью несколько более сложных формул по сравнению с (23), которые получены при включении еще одной высокочастотной гармоники в пробную функцию $\varphi(t)$.

резонансам разных порядков соответствуют кривые, заключенные между нижней ($n \rightarrow \infty$) и верхней ($n = 2$) границами динамической стабилизации. Возможность возбуждения таких колебаний не влияет на устойчивость перевернутого положения, поскольку маятник может быть захвачен в n -периодический предельный цикл только при определенном начальном возбуждении: начальное состояние должно принадлежать бассейну притяжения соответствующего аттрактора. В противном случае перевернутый маятник в конце концов приходит в состояние покоя.

Предельному случаю очень высокой частоты возбуждения ($\omega\sqrt{l/g} = \omega/\omega_0 \rightarrow \infty$), когда сила тяжести становится пренебрежимой по сравнению с силой инерции (или, что то же самое, случаю маятника в отсутствие силы тяжести, т.е. $\omega_0/\omega = 0$) соответствует значение $k = 0$. Это точки пересечения кривых на рис. 7 с вертикальной m -осью. Продолжения этих кривых через $k = 0$ в область положительных значений $k = (\omega_0/\omega)^2$ описывают переход через невесомость от «силы тяготения», направленной вверх, к обычной ситуации, т.е. дают пороговые амплитуды субгармонических резонансов неперевернутого маятника. Субгармонические колебания некоторого порядка n (при $n > 2$) возможны при значениях $k < 1/n^2$, т.е. при частоте возбуждения $\omega > n\omega_0$. Кривые на рис. 7 показывают, что при уменьшении параметра k от критического значения $1/n^2$ к нулю (т.е. при увеличении частоты ω за пределы значения $n\omega_0$, при котором вообще становятся возможными субгармонические колебания порядка n), пороговая амплитуда возбуждения n -периодических колебаний быстро возрастает.

Полное исследование режимов маятника с осциллирующим подвесом осложняется большим числом параметров, характеризующих систему ($\omega_0, \omega, a, \gamma$). Значительное упрощение достигается, если исключить один из параметров, а именно собственную частоту $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ малых колебаний, т.е. перейти к изучению маятника в отсутствие силы тяжести. Такая упрощенная модель полезна также для качественного объяснения поведения маятника в поле тяжести при высокой частоте и/или большой амплитуде осцилляций подвеса, когда сила тяжести играет роль малой добавки к силе инерции. Происхождение многих сложных движений маятника, обсуждаемых в этой статье, не связано с силой тяжести, и для их изучения можно рассмотреть простейший случай осцилляций подвеса в невесомости, который описывается уравнением (3) с $\omega_0 = 0$.

Точки пересечения кривых на рис. 7 с осью ординат, соответствующие пороговым условиям в отсутствие силы тяжести ($k = 0$), дают, в соответствии с выражением (23), следующие значения для относительной амплитуды возбуждения:

$$m_{\min} = \frac{\sqrt{2}(n^2 - 1)}{n^2\sqrt{n^2 + 1}}. \quad (25)$$

Относительный вклад A_{n-1}/A_1 и A_{n+1}/A_1 наиболее важных высших гармоник $\varphi(t)$ в (20) дается при $k = 0$ следующими выражениями:

$$\frac{A_{n-1}}{A_1} = \frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}(n-1)}, \quad \frac{A_{n+1}}{A_1} = \frac{n-1}{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}(n+1)}. \quad (26)$$

Для субгармонических колебаний высоких порядков ($n \gg 1$) выражение (25) дает в случае отсутствия силы тяжести приближенное значение $m_{\min} \approx \sqrt{2}/n$, которое было получено выше (см. (16)) с помощью простого подхода, основанного на разделении быстрого и медленного движений, из условия совпадения n циклов

возбуждения с одним периодом медленного движения маятника вблизи дна эффективного потенциала. Относительные вклады высших гармоник A_{n-1}/A_1 и A_{n+1}/A_1 , определяемые формулами (26), при $n \gg 1$ имеют почти одинаковые значения, стремящиеся к $1/(\sqrt{2n}) = m_{\min}/2$ в соответствии с выражением (19), описывающим n -периодические колебания как суперпозицию быстрого и медленного движений.

Для небольших значений n мы не вправе ожидать хороших количественных предсказаний от простого подхода, использующего эффективный потенциал, потому что период медленного движения равен лишь нескольким периодам осцилляций подвеса: «быстрая» компонента в таких случаях оказывается недостаточно быстрой для получения хороших результатов при усреднении. При малых n критерии (24) и (25) дают более точные теоретические значения m_{\min} , а выражения (26) дают улучшенные значения для (неравных) вкладов высших гармоник A_{n-1}/A_1 и A_{n+1}/A_1 в колебания периода nT (при $\omega_0 = 0$). Так, для $n = 8$ формула (25) дает $m_{\min} = a_{\min}/l = 63/(32\sqrt{130}) = 0.173$, а (26) дает для амплитуд 7-й и 9-й гармоник значения $A_7/A_1 = 9/(7\sqrt{130}) = 0.113$, $A_9/A_1 = 7/(9\sqrt{130}) = 0.068$. Эти теоретические значения с высокой точностью совпадают с результатами компьютерного моделирования, основанного на численном интегрировании уравнения (3).

Пример n -периодических колебаний с нечетным $n = 5$ приведен на рис. 8. В спектре доминирует основная гармоника с частотой $\omega/5$. Значительный вклад в $\varphi(t)$ дают 4-я и 6-я гармоники. При превышении порога в спектре субгармонических резонансов появляются дополнительные компоненты: отметим 3-ю гармонику в спектре колебаний с $n = 8$ на рис. 6 и 2-ю в спектре колебаний с $n = 5$ на рис. 8.

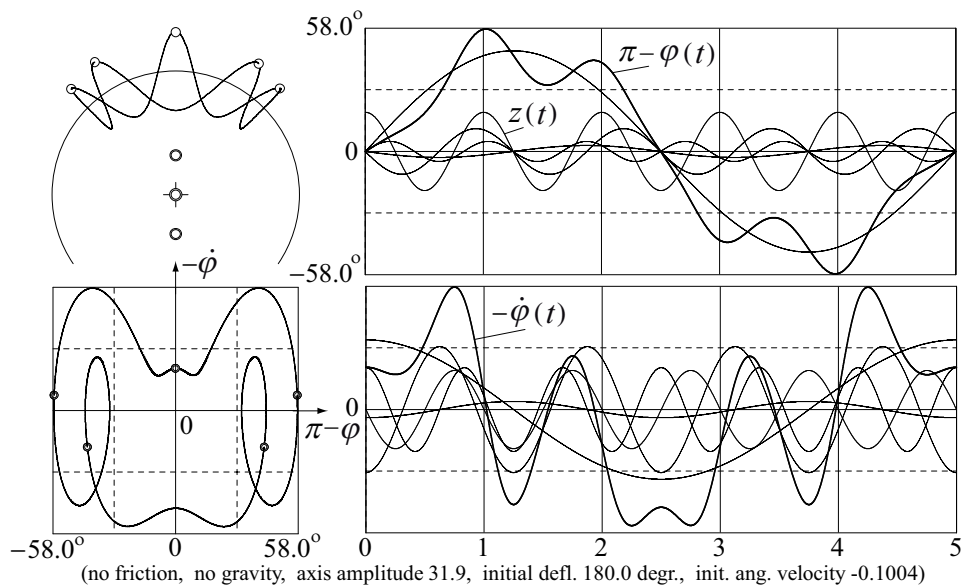


Рис. 8: Траектория в пространстве, фазовая траектория с сечениями Пуанкаре и графики стационарных колебаний для субгармонического резонанса 5-го порядка. Тонкими линиями показаны графики отдельных гармоник. В спектре доминирует основная гармоника с частотой $\omega/5$. Значительный вклад в $\varphi(t)$ дают 4-я и 6-я гармоники. При большом размахе колебаний вклад второй гармоники $2\omega/5$ также заметен.

При наличии силы тяжести обсуждаемые здесь n -периодические «квивающие» колебания (“multiple-nodding oscillations”) возможны как для перевернутого, так и неперевернутого маятника.

8 Сосуществование субгармонических резонансов разных порядков n

Представление об эффективном потенциале, будучи применимым к описанию медленных колебаний большого размаха, позволяет объяснить сосуществование субгармонических резонансов разных порядков при одних и тех же значениях частоты и амплитуды осцилляций подвеса. При оценке условий возникновения n -периодических колебаний с помощью выражения (14) предполагалось, что медленное движение маятника в яме эффективного потенциала представляет собой гармоническое колебание, что справедливо только тогда, когда это движение ограничено малой окрестностью дна потенциальной ямы (см. рис. 5). Поэтому условие (25) дает лишь нижний предел амплитуды возбуждения, соответствующий возбуждению n -периодических колебаний бесконечно малой амплитуды. Медленные n -периодические колебания конечного размаха, когда отклонения маятника простираются за пределы параболической части эффективного потенциала, захватывая его пологие склоны, уже не будут гармоническими и характеризуются увеличенным периодом по сравнению с малыми колебаниями вблизи дна потенциальной ямы.

Для колебаний большого размаха, как видно из рис. 6, вклад третьей гармоники становится заметным. В приближенном подходе, основанном на разделении быстрого и медленного движений, этот вклад объясняется отклонением формы эффективного потенциала от параболической, т.е. ангармоничностью медленных колебаний большого размаха. Эффективному потенциалу $U(\psi)$ соответствует «мягкая» возвращающая сила, поэтому период колебаний возрастает с увеличением их размаха. Благодаря этой зависимости периода от размаха оказывается возможным сосуществование стационарных n -периодических колебаний с разными n при одних и тех же значениях амплитуды и частоты осцилляций подвеса. Например, один цикл медленного колебания некоторого размаха может охватывать 6 периодов возбуждения, а цикл колебания несколько большего размаха в той же непараболической потенциальной яме — 8 периодов возбуждения.

На рис. 9 показаны установившиеся колебания с периодом $6T$, сосуществующие с показанными на рис. 6 колебаниями периода $8T$ при тех же значениях параметров системы. В какой именно из этих конкурирующих стационарных режимов (аттракторов) будет захвачен маятник после завершения переходного процесса, зависит от начальных условий. Множество начальных состояний, которое в конце концов приводит маятник в определенный стационарный режим, образует «бассейн притяжения» соответствующего аттрактора. Режимам на рис. 6 и 9 соответствуют разные бассейны притяжения.

Чтобы оценить, как размах колебаний при субгармоническом резонансе порядка n зависит от превышения $a - a_{\min}$ амплитуды возбуждения a над пороговым значением a_{\min} , и как вклад третьей гармоники зависит от размаха колебаний, можно в дифференциальном уравнении (11), описывающем медленную компоненту дви-

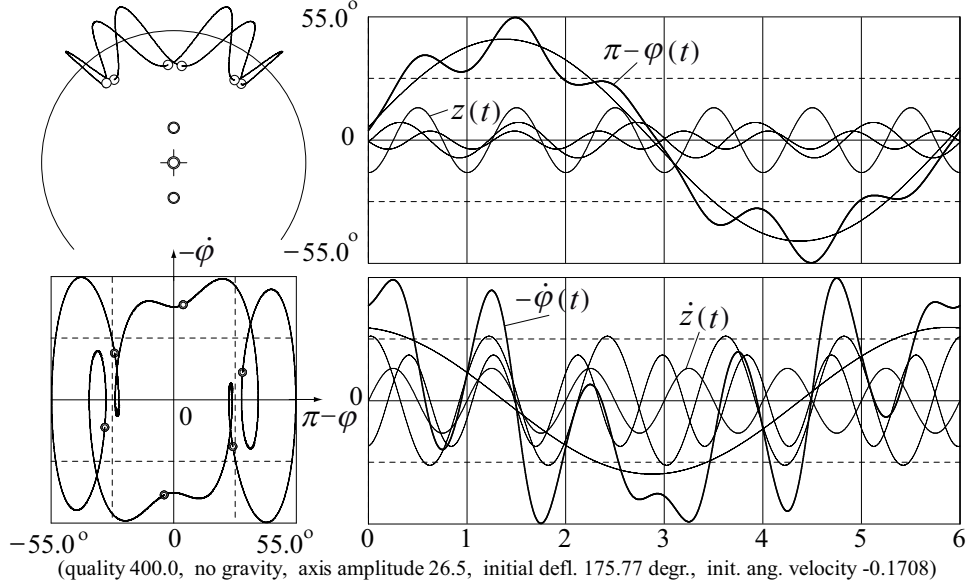


Рис. 9: Траектория в пространстве, фазовая траектория с сечениями Пуанкаре и графики стационарных колебаний для субгармонического резонанса 6-го порядка. Тонкими линиями показаны графики отдельных гармоник. В спектре доминирует основная гармоника с частотой $\omega/6$. Заметный вклад в $\varphi(t)$ дают 5-я и 7-я гармоники.

жения, разложить $\sin \psi$ и $\sin 2\psi$ в ряд по степеням ψ и удержать первые два члена:

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2(\psi - \frac{1}{6}\psi^3) + \frac{1}{2}m^2\omega^2(\psi - \frac{2}{3}\psi^3) = 0. \quad (27)$$

Решение уравнения (27) можно искать в виде суперпозиции первой и третьей гармоник:

$$\psi = A_1 \sin \omega_1 t + A_3 \sin 3\omega_1 t. \quad (28)$$

Подставляя ψ из (28) в уравнение (27) и приравнявая нулю коэффициент при $\sin \omega_1 t$, находим зависимость частоты медленных колебаний от амплитуды A_1 :

$$\omega_{\text{down, up}}^2 = \frac{1}{2}m^2\omega^2(1 - \frac{1}{2}A_1^2) \pm \omega_0^2(1 - \frac{1}{8}A_1^2). \quad (29)$$

Это выражение переходит в (14) при $A_1 \rightarrow 0$. Приравнявая частоты $\omega_{\text{down, up}}$ частоте ω/n , находим приближенную зависимость амплитуды основной гармоники A_1 от превышения амплитуды возбуждения над порогом $m - m_{\text{min}}$. Для случая $\omega_0 = 0$ (отсутствие силы тяжести) получаем:

$$A_1 = \sqrt{2}\sqrt{1 - m_{\text{min}}^2/m^2} \approx 2\sqrt{1 - m_{\text{min}}/m}. \quad (30)$$

Последнее приближенное выражение справедливо, когда амплитуда возбуждения $m = a/l$ лишь немного превышает критическое значение, т.е. когда $m - m_{\text{min}} \ll m_{\text{min}}$.

Для субгармонических резонансов порядков $n = 8$ и $n = 6$ зависимость A_1 от m (30) показана сплошными линиями на рис. 10 слева вместе с экспериментальными

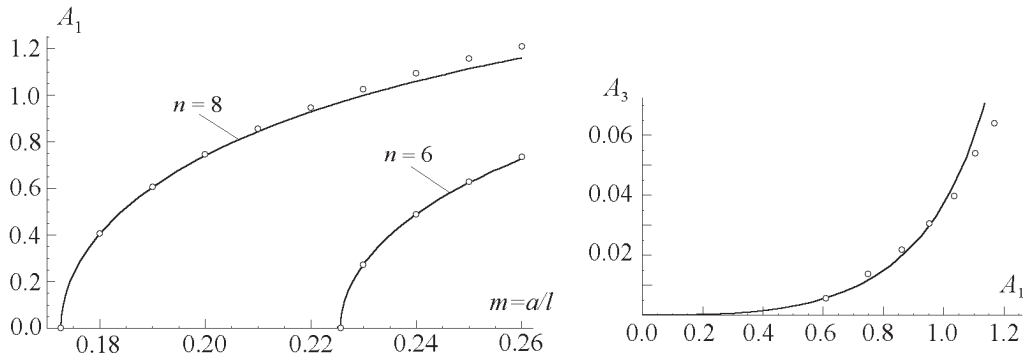


Рис. 10: Амплитуда основной гармоники в субгармонических резонансах порядков $n = 8$ и $n = 6$ как функция амплитуды возбуждения $m = a/l$ (слева) и амплитуда A_3 третьей гармоники в субгармоническом резонансе порядка $n = 8$ как функция амплитуды основной гармоники A_1 . Кривые – приближенная теория (подробности в тексте), точки – компьютерное моделирование.

значениями A_1 (точки), полученными путем численного моделирования системы с помощью точного уравнения (3). Если амплитуда m осцилляций подвеса больше, чем $m_{\min} = 0.226$ для $n = 6$, стационарные n -периодические колебания с $n = 8$ и $n = 6$ могут сосуществовать при одних и тех же значениях параметров системы.

Амплитуду A_3 третьей гармоники в уравнении (28) можно оценить аналогично, приравняв нулю коэффициент при $\cos 3\omega_1 t$ после подстановки ψ из (28) в уравнение (27). Удобно представить A_3 как функцию амплитуды A_1 медленного движения: $A_3 = \frac{1}{3}A_1^3/(16 - 7A_1^2)$. Соответствующий график показан сплошной линией на рис. 10 справа. Точками показаны результаты компьютерного моделирования для резонанса $n = 8$.

Трение вносит некоторый сдвиг фаз между вынужденными осцилляциями подвеса и гармониками установившихся n -периодических колебаний маятника. Благодаря этому сдвигу фаз маятник получает энергию, необходимую для компенсации потерь энергии из-за трения. При наличии трения пространственные траектории прямого и обратного движения маятника не совпадают и нарушается симметрия фазовой траектории относительно оси ординат, что заметно на рис. 6 и 9 даже для движения при очень слабом трении.

9 Верхняя граница динамической стабилизации и параметрический резонанс

Если амплитуда a принудительных осцилляций подвеса превышает определенное критическое значение a_{\max} , динамически стабилизированный перевернутый маятник утрачивает устойчивость. После небольшого возмущения маятник не возвращается в перевернутое положение даже при сколь угодно малом отклонении, а в конце концов оказывается захваченным в предельный цикл, совершая стационарные колебания конечного размаха около перевернутого положения. Период этих колебаний равен двум периодам возбуждения. Размах установившихся колебаний

растет с увеличением превышения амплитуды осцилляций подвеса над порогом a_{\max} .

Потеря устойчивости перевернутого маятника впервые описана в 1992 г. Блэкберном и др. [7] и продемонстрирована на опыте в [8]. Авторы назвали возбуждаемые при этом колебания «флаттер»-модой (“flutter-mode”), что можно перевести как «машущие» или «трепещущие» колебания. Графики таких колебаний и характерная фазовая траектория с двумя «вмятинами» показаны на рис. 11.

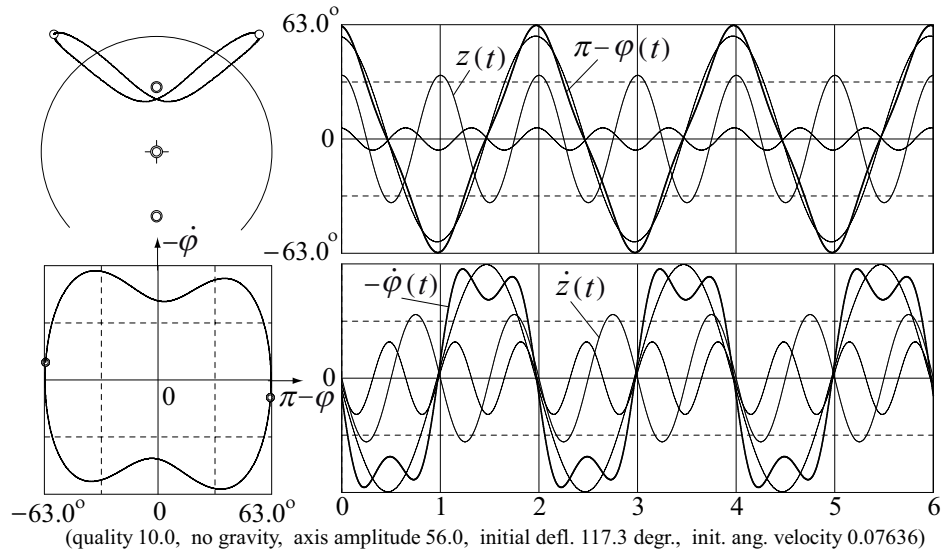


Рис. 11: Стационарные колебания перевернутого маятника с периодом $2T$ («флаттер»-мода), происходящие при превышении верхней границы динамической стабилизации. Спектр состоит из основной гармоники с частотой $\omega/2$ и третьей гармоники с частотой $3\omega/2$.

Этот стационарный режим колебаний перевернутого маятника можно, разумеется, рассматривать как частный случай субгармонических резонансов, а именно как резонанс с $n = 2$. Как уже отмечалось, в случае малых n движение маятника невозможно представить корректно в виде суперпозиции быстрой и медленной составляющих. Амплитуда подвеса a_{\max} , при которой возможны такие колебания, не мала по сравнению с длиной маятника l . Поэтому данный режим колебаний оказывается за пределами применимости приближения, основанного на использовании эффективного потенциала для маятника с осциллирующим подвесом. Такой подход не в состоянии объяснить как дестабилизацию перевернутого маятника, так и потерю устойчивости нижнего положения равновесия, происходящую в условиях параметрического резонанса (в последнем случае амплитуда подвеса может быть и малой, но частота его осцилляций недостаточно велика для разделения быстрого и медленного движений).

Компьютерное моделирование (см. рис. 11) показывает очень простой спектральный состав флаттер-колебаний с периодом $2T$, происходящих при превышении верхней границы динамической устойчивости: это основная гармоника с частотой $\omega/2$, и небольшая примесь третьей гармоники с частотой $3\omega/2$. Отметим, что подобным спектром характеризуются установившиеся колебания неперевер-

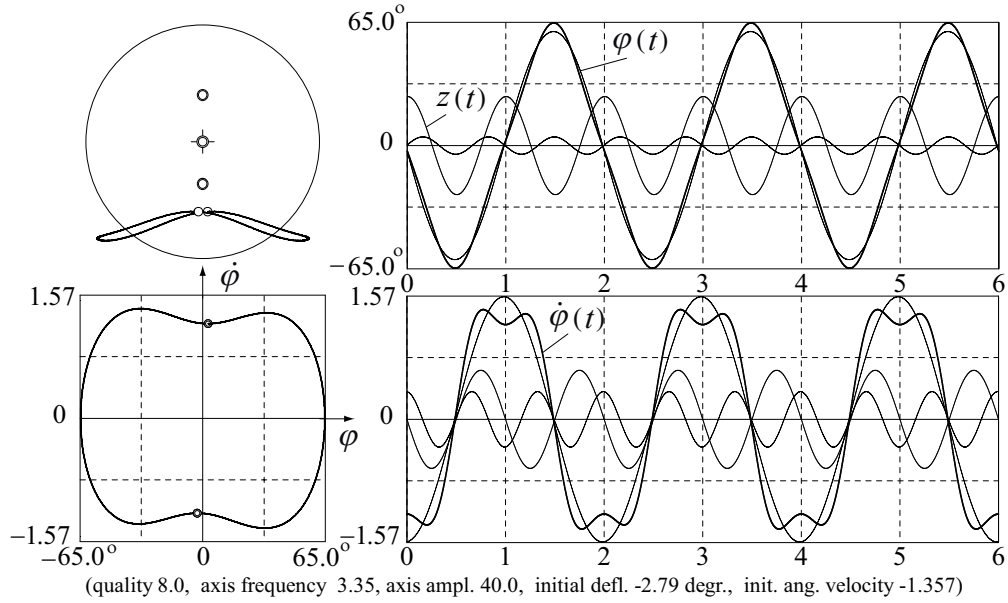


Рис. 12: Траектория в пространстве, фазовая орбита и графики стационарных колебаний маятника с периодом $2T$ (параметрический резонанс). Спектр состоит из основной гармоники с частотой $\omega/2$ и третьей гармоники с частотой $3\omega/2$, графики которых показаны тонкими линиями.

нутого маятника в условиях обычного параметрического резонанса (см. рис. 12). Это сходство не случайно: основной параметрический резонанс перевернутого маятника, возбуждающийся при $\omega \approx 2\omega_0$, и флаттер-мода, разрушающая динамическую устойчивость перевернутого маятника, принадлежат одной и той же ветви стационарных колебаний маятника с осциллирующим подвесом, которую можно рассматривать как субгармонический резонанс порядка $n = 2$. Поэтому верхняя граница динамической стабилизации перевернутого маятника может быть найдена непосредственно из дифференциального уравнения системы (3) тем же методом, который используется для нахождения условий параметрической неустойчивости обычного маятника (см., например, [4]). Для решения этой задачи можно пользоваться линеаризованным уравнением (21), поскольку на границе динамической стабилизации амплитуда колебаний бесконечно мала. Периодическое решение уравнения (21), соответствующее искомой границе, можно представить в виде суперпозиции основной гармоники, частота которой $\omega/2$ равна половине частоты осцилляций подвеса, и третьей гармоники с частотой $3\omega/2$:

$$\varphi(t) = A_1 \sin(\omega t/2) + A_3 \sin(3\omega t/2). \quad (31)$$

Фазы гармоник в (31) соответствуют осцилляциям подвеса в виде $z(t) = a \cos \omega t$. Подставляя пробную функцию $\varphi(t)$ из (31) в линеаризованное дифференциальное уравнение (21) с $\gamma = 0$ и разлагая произведения тригонометрических функций, приходим к уравнению, в котором нужно приравнять нулю коэффициенты при $\sin(\omega t/2)$ и $\sin(3\omega t/2)$. Таким образом мы получаем систему однородных уравнений для коэффициентов A_1 и A_3 , которая имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю. Это условие приводит к квадратному уравнению для ис-

комой критической амплитуды осцилляций подвеса $a_{\max}/l = m_{\max}$, релевантный корень которого в случае $\omega_0 = 0$ (отсутствие силы тяжести или предельно высокая частота осцилляций подвеса) равен $m_{\max} = 3(\sqrt{13} - 3)/4 = 0.454$. Соответствующее этому корню отношение амплитуд третьей и основной гармоник равно $A_3/A_1 = (\sqrt{13} - 3)/6 = 0.101$.

Несколько более сложное вычисление, в котором учитываются гармоники пробной функции $\varphi(t)$ вплоть до 7-й, дает для m_{\max} и A_3/A_1 значения, совпадающие с приведенными выше (в пределах принятой здесь точности). Эти значения хорошо согласуются с результатами компьютерного моделирования в отсутствие силы тяжести ($\omega_0 = 0$) при малых угловых отклонениях маятника. Когда амплитуда возбуждения $m = a/l$ превышает критическое значение $m_{\max} = 0.454$, размах колебаний флаттер-моды (амплитуда основной гармоники A_1) растет пропорционально квадратному корню из этого превышения: $A_1 \sim \sqrt{a - a_{\max}}$. Такая зависимость следует из нелинейного дифференциального уравнения маятника (3), если в нем $\sin \varphi$ аппроксимировать разложением $\varphi - \varphi^3/6$, и подтверждается компьютерным моделированием вплоть до амплитуд 45° (рис. 13).

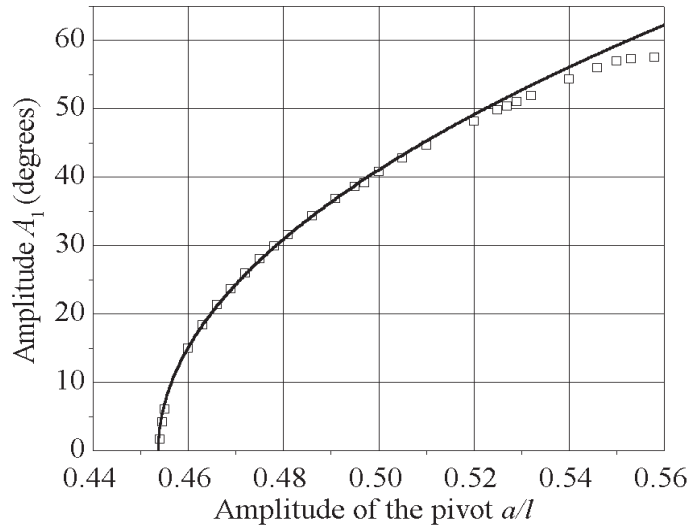


Рис. 13: Амплитуда A_1 основной гармоники стационарных колебаний флаттер-моды при превышении верхней границы динамической стабилизации.

При увеличении амплитуды a осцилляций подвеса выше значения $0.555 l$ происходит бифуркация нарушения симметрии: максимальные отклонения маятника в одну и другую сторону становятся различными, что разрушает симметрию колебаний в пространстве и симметрию фазовой траектории. При дальнейшем увеличении амплитуды осцилляций подвеса, после достижения значения $a/l = 0.565$, система претерпевает последовательность бифуркаций удвоения периода и наконец, при $a/l = 0.56622$ (для $Q = 20$), колебательное движение маятника после продолжительного хаотического переходного процесса сменяется однонаправленным вращением с периодом, равным периоду возбуждения.

Аналогичное, хотя и более сложное теоретическое исследование границ режимов установившихся колебаний маятника при наличии силы тяжести позволяет получить зависимость критической (дестабилизирующей) амплитуды подвеса m

от частоты возбуждения ω . Эту зависимость удобно выразить, используя параметр $k = g/(l\omega^2)$:

$$m_{\max} = (\sqrt{117 - 232k + 80k^2} - 9 + 4k)/4. \quad (32)$$

Соответствующая граница показана на рис. 7 кривой, обозначенной как $n = 2$. Критическая амплитуда возбуждения стремится к нулю при $k \rightarrow 1/4$ (при $\omega \rightarrow 2\omega_0$). Это условие соответствует параметрическому резонансу маятника в нижнем положении: при малых амплитудах подвеса резонанс наблюдается, когда частота возбуждения вдвое больше собственной частоты. Если ω превышает $2\omega_0$ (т.е. если $k < 0.25$), для возникновения параметрических колебаний амплитуда возбуждения должна быть конечной даже в отсутствие трения.

Кривая $n = 2$ пересекает ось ординат при $m = 3(\sqrt{13} - 3)/4 = 0.454$. Этот случай ($k = 0$) соответствует пределу высокой частоты возбуждения ($\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$) или отсутствию силы тяжести ($\omega_0 = 0$), так что $m = 0.454$ дает верхний предел устойчивости каждого из двух динамически стабилизированных положений равновесия: если $m > 0.454$ при $g = 0$, возбуждается флаттер-мода колебаний маятника. Продолжение кривой $n = 2$ в область отрицательных значений $k = g/(l\omega^2)$ соответствует переходу от обычной (направленной вниз) силы тяжести через «невесомость» к отрицательной (направленной вверх) «силе тяжести», что эквивалентно перевернутому маятнику в обычном (направленном вниз) поле тяжести. Таким образом, одна и та же формула (32) дает амплитуду возбуждения как функцию частоты ω , при которой нижнее положение равновесия становится неустойчивым благодаря обычному параметрическому резонансу, и перевернутое (динамически стабилизированное) положение становится неустойчивым благодаря возбуждению флаттер-моды колебаний маятника. Как уже отмечалось, оба явления принадлежат одной ветви регулярного поведения маятника, т.е. тесно связаны между собой и имеют общую физическую природу. Все кривые, соответствующие субгармоническим резонансам высоких порядков ($n > 2$), лежат между этой кривой $n = 2$ и нижней границей динамической стабилизации перевернутого маятника (кривая $n \rightarrow \infty$ на рис. 7).

В действительности выражение (32) дает обе границы интервала неустойчивости, окружающего основной параметрический резонанс, который имеет место при $k = 1/4$, т.е. при $\omega = 2\omega_0$. В области $k > 1/4$ ($\omega < 2\omega_0$) выражение (32) дает отрицательные значения m , абсолютная величина которых $|m| = a/l$ соответствует стационарным колебаниям на второй границе интервала неустойчивости (справа от $k = 0.25$, см. рис. 7). Эти колебания тоже содержат две гармоники с частотами $\omega/2$ и $3\omega/2$, но их фазы будут иными по сравнению с фазами гармоник в (31) — это гармоники косинусоидального типа (при $m > 0$). При отрицательных m , что физически означает просто изменение фазы осцилляций подвеса на противоположную, гармоники колебаний на второй границе будут, как и в (31), синусоидального типа.

На рис. 14 кривые 1 и 2 показывают границы основного интервала параметрической неустойчивости ($\omega \approx 2\omega_0$) как функции частоты возбуждения ω/ω_0 (в отличие от более удобного для записи формул, но физически менее осмысленного параметра $k = g/(l\omega^2) = (\omega_0/\omega)^2$, использованного на рис. 7. Критическая амплитуда подвеса стремится к нулю, когда частота приближается к $2\omega_0$ с любой стороны. Кривая 3 показывает на плоскости параметров (ω/ω_0 , a/l) границу области параметрической неустойчивости при наличии трения (для $Q = \omega_0/2\gamma = 5.0$).

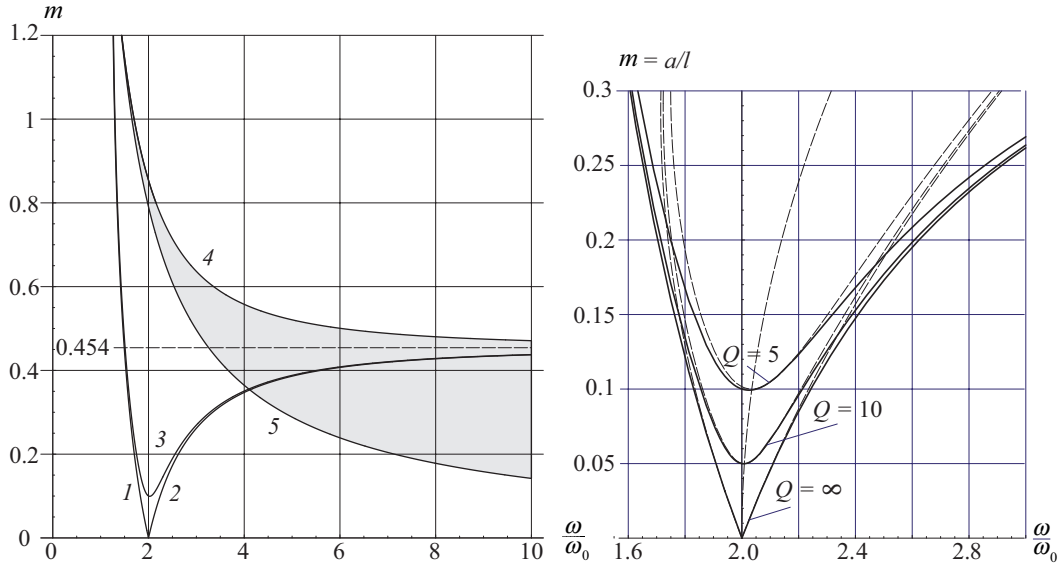


Рис. 14: Границы параметрической неустойчивости: амплитуда подвеса как функция частоты осцилляций. Кривые 1 и 2 — границы основного интервала ($\omega \approx 2\omega_0$) для неперевернутого маятника в отсутствие трения; 3 — то же самое с трением ($Q = 5.0$); кривые 4 и 5 — верхняя и нижняя границы динамической стабилизации перевернутого маятника. Справа показана кривая 3 в увеличенном масштабе.

Когда подвес осциллирует с частотой $2\omega_0$, нижнее положение равновесия теряет устойчивость, если относительная амплитуда этих осцилляций $m = a/l$ превышает пороговое значение $1/2Q$. Кривая 3 почти сливается с кривыми 1 и 2, как только частота ω немного отклоняется от резонансного значения $2\omega_0$ (детальное обсуждение роли трения приведено ниже). В предельном случае высокой частоты ω , когда роль силы тяжести становится пренебрежимой, относительная амплитуда подвеса a/l стремится к значению 0.454, соответствующему дестабилизации каждого из двух симметрично расположенных положений равновесия.

Кривая 4 на рис. 14 соответствует дестабилизации перевернутого маятника в результате возбуждения флаттер-моды. Чем ниже частота осцилляций подвеса, тем больше критическая амплитуда, при которой верхнее положение маятника становится неустойчивым. Фактически кривая 4 возбуждения флаттер-моды представляет собой продолжение (через бесконечное значение частоты ω) кривой 2 (или кривой 3 в присутствии трения), т.е. правой границы основного параметрического резонанса. Взаимосвязь этих явлений становится очевидной, если сопоставить кривым 4 и 2 эквивалентные им части единой кривой $n = 2$ на диаграмме 7 в области отрицательных и положительных значений k соответственно.

Кривая 5 на диаграмме 14 показывает на плоскости параметров нижнюю границу динамической стабилизации перевернутого маятника, задаваемую критерием (24). Таким образом, область устойчивости занимает затененную часть этой плоскости между кривыми 5 и 4.

10 Влияние трения

При малых и умеренных амплитудах осцилляций подвеса основной параметрический резонанс происходит при частоте возбуждения приблизительно вдвое превосходящей собственную частоту: $\omega \approx 2\omega_0$. Порог параметрического возбуждения при $\omega = 2\omega_0$ можно рассчитать, приравнявая работу, совершаемую силой инерции за период установившегося движения маятника, энергии, рассеиваемой из-за трения. При этом движение подвеса удобно считать происходящим по закону $z(t) = -a \sin \omega t$ вместо (1), выбрав начало отсчета времени соответствующим образом. При таком выборе малые установившиеся колебания в условиях порога приближенно описываются косинусоидальной функцией времени: $\varphi(t) = C_1 \cos \omega t/2$.

Момент силы инерции равен $F_{\text{in}} l \sin \varphi$, а элементарная работа dW , совершаемая этим моментом за бесконечно малое время dt равна

$$\begin{aligned} F_{\text{in}} l \sin \varphi d\varphi &= F_{\text{in}} l \sin \varphi \dot{\varphi} dt = \\ -I(a/l)\omega^2 \sin \omega t \sin \varphi \dot{\varphi} dt &\approx -I(a/l)\omega^2 \sin \omega t \varphi \dot{\varphi} dt. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь I — момент инерции маятника. Интегрируя это выражение по периоду колебаний маятника $T = 2\pi/\omega_0 = 4\pi/\omega$, находим вложение ΔE в полную энергию E на протяжении двух циклов осцилляций подвеса: $\Delta E = I\omega^2 C_1^2 (a/l)\omega/2\pi$. Работа силы трения за то же время определяет рассеиваемую энергию. Элементарная работа силы трения за dt равна $-2I\gamma(\dot{\varphi})^2 dt$. Интегрируя по периоду колебаний, получаем $-I\gamma C_1^2 \omega^2 \pi$. Обратим внимание, что как потери энергии из-за трения, так и поступление энергии за счет осцилляций подвеса пропорциональны квадрату амплитуды колебаний C_1 . Поэтому при превышении порога параметрического резонанса трение не в состоянии ограничить рост амплитуды. Приравнявая вложение энергии потерям, находим $\omega(a/l) = 2\gamma$. Поскольку в условиях резонанса $\omega \approx 2\omega_0$, получаем следующее приближенное выражение для порогового значения относительной амплитуды осцилляций подвеса:

$$m_{\text{thres}} = \frac{a_{\text{thres}}}{l} = \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{2Q}. \quad (34)$$

Если амплитуда осцилляций превышает это пороговое значение, параметрический резонанс возможен в некотором интервале частот возбуждения по обе стороны от резонансной частоты $\omega_{\text{res}} = 2\omega_0$. При заданной амплитуде возбуждения этот интервал тем шире, чем меньше трение. Чтобы найти границы интервала параметрической неустойчивости в присутствии трения, нужно включить член $2\gamma\dot{\varphi}$ в линеаризованное дифференциальное уравнение маятника (21). При учете трения решение $\varphi(t)$ этого уравнения, в отличие от (31), включает как синусоидальные, так и косинусоидальные члены:

$$\varphi(t) = A_1 \sin(\omega t/2) + A_3 \sin(3\omega t/2) + B_1 \cos(\omega t/2) + B_3 \cos(3\omega t/2). \quad (35)$$

Подставляя $\varphi(t)$ из (35) в уравнение (21), получаем однородную систему приближенных уравнений для A_1 , A_3 , и B_1 , B_3 . Искомые границы интервала параметрической неустойчивости находятся из условия существования нетривиального решения этой системы. Получающиеся выражения для границ оказываются весьма громоздкими и поэтому здесь не приводятся. Соответствующий график в случае

$Q = 5$ показан как кривая 3 на диаграмме 14. Оказывается, что умеренное трение заметным образом влияет на границы интервала параметрической неустойчивости только в непосредственной окрестности $\omega = 2\omega_0$, т.е. при малых значениях относительной амплитуды осцилляций подвеса $m = a/l$. Детальная структура границ интервала в окрестности $\omega = 2\omega_0$ показана тремя «языками» на рис. 14 справа для значений $Q = 5$, $Q = 10$ и для отсутствия трения ($Q \rightarrow \infty$). Тонкие кривые построены по приближенной формуле (36), справедливой при малых $m = a/l \ll 1$ для границ интервала неустойчивости в окрестности $\omega = 2\omega_0$:

$$\omega_{1,2} = (2 \pm 2\sqrt{m^2 - 1/(2Q)^2} + 7m^2/2)\omega_0. \quad (36)$$

Если значения параметров лежат внутри этих «языков», поступление энергии за счет осцилляций подвеса превосходит диссипацию. Нижнее положение равновесия становится неустойчивым, и маятник покидает его при малейшем возмущении. При этом рост амплитуды ограничен нелинейными эффектами. Увеличение периода собственных колебаний маятника при больших амплитудах приводит к тому, что условия параметрической раскачки — два цикла осцилляций подвеса за один период собственных колебаний — с ростом амплитуды маятника перестают выполняться, и в результате после затухания переходных биений устанавливается колебание ограниченного размаха.

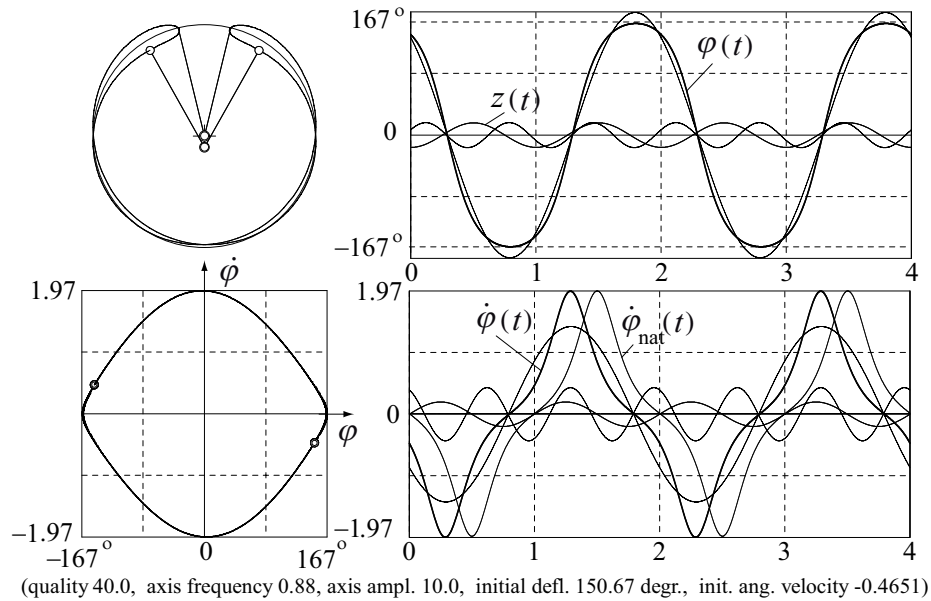


Рис. 15: Траектория в пространстве, фазовая орбита и графики стационарных колебаний маятника при $\omega < 2\omega_0$. Спектр состоит из основной гармоники с частотой $\omega/2$ и третьей гармоники с частотой $3\omega/2$, графики которых показаны тонкими линиями.

Но благодаря тем же нелинейным свойствам маятника оказывается, что стационарные параметрические колебания с угловой амплитудой, приближающейся к 180° , в системе с малым трением возможны даже при небольшой амплитуде осцилляций подвеса. Пример таких параметрических колебаний приведен на рис. 15.

Из-за увеличения собственного периода маятника при больших амплитудах синхронизация его колебаний с осцилляциями подвеса (фазовый захват) может произойти при $\omega < 2\omega_0$. Для этого при амплитуде 167° частота возбуждения ω должна быть всего $0.88\omega_0$ (сравните с условием резонанса $\omega = 2\omega_0$ при малых амплитудах). По характеру параметрические колебания на рис. 15 очень близки к нелинейным собственным незатухающим колебаниям большого размаха [25]. Чтобы проиллюстрировать это сходство, на нижнем графике тонкой линией показана для сравнения угловая скорость $\dot{\varphi}_{\text{nat}}(t)$ собственных колебаний такого же размаха в отсутствие трения. Как видно, период незатухающих собственных колебаний в точности равен периоду параметрических колебаний, и форма графиков $\dot{\varphi}_{\text{nat}}(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ полностью совпадает. В этом случае роль осцилляций подвеса сводится к подпитке маятника энергией для компенсации потерь на трение. В целом такие параметрические колебания имеют много общего с так называемой «модой звонаря» (“bell-ringer mode”), которую можно наблюдать при возбуждении жесткого маятника синусоидальным внешним моментом [26].

11 Субгармонические резонансы дробных порядков

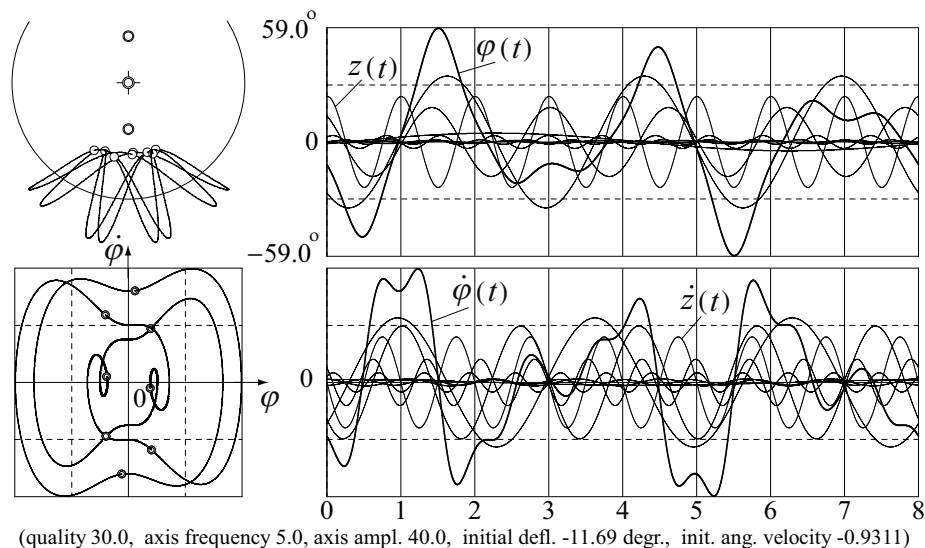


Рис. 16: Пространственная траектория, фазовая орбита и графики стационарных колебаний с периодом $8T$, которые можно рассматривать как субгармонический резонанс дробного порядка $8/3$.

Здесь мы опишем недавно открытые [15] режимы регулярного периодического поведения маятника с осциллирующим подвесом, родственные рассмотренным выше субгармоническим резонансам. На рис. 16 показаны пространственная траектория, фазовая орбита и графики очень необычных на первый взгляд регулярных колебаний маятника с периодом $8T$. Покажем, что такие колебания можно трактовать как пример субгармонического резонанса дробного порядка, в данном случае — порядка $8/3$. Из рис. 16 видно, что амплитуда основной гармоники (частота которой равна $\omega/8$) много меньше амплитуды третьей гармоники с частотой $3\omega/8$. Эта

третья гармоника доминирует в спектре, поэтому в данном колебании её можно считать главной, а основную гармонику $\omega/8$ рассматривать как её третью субгармонику. Значительный вклад в спектр колебания дают также 5-я и 11-я гармоники с частотами $5\omega/8$ и $11\omega/8$. Условия существования стационарных колебаний такого типа (субгармонического резонанса порядка $n/3$) при малых амплитудах приближенно можно найти из линеаризованного дифференциального уравнения (21) методом, аналогичным использованному выше для субгармонического резонанса целочисленного порядка n : можно попытаться искать решение $\varphi(t)$ состоящим из трех спектральных компонент с частотами $3\omega/n$, $(n-3)\omega/n$ и $(n+3)\omega/n$:

$$\varphi(t) = A_3 \sin(3\omega t/n) + A_{n-3} \sin[(n-3)\omega t/n] + A_{n+3} \sin[(n+3)\omega t/n]. \quad (37)$$

Подставляя функцию $\varphi(t)$ из (37) в уравнение (21) с $\gamma = 0$ и разлагая произведения тригонометрических функций, получаем систему уравнений для коэффициентов A_3 , A_{n-3} и A_{n+3} . Условие существования нетривиального решения однородной системы дает выражение для минимальной амплитуды осцилляций подвеса, при которой возможен субгармонический резонанс порядка $n/3$. Приведем результат расчета для частного случая отсутствия силы тяжести $g = 0$ ($\omega_0 = 0$):

$$m_{\min} = \frac{3\sqrt{2}(n^2 - 3^2)}{n^2\sqrt{n^2 + 3^2}}. \quad (38)$$

Полученное выражение (38) можно сравнить с аналогичным выражением (23) для критических значений амплитуды осцилляций подвеса при возбуждении субгармонических резонансов целочисленных порядков. Результаты аналитических расчетов критических значений m_{\min} и относительных амплитуд гармоник A_{n-3}/A_3 и A_{n+3}/A_3 для $n \geq 8$ находятся в хорошем согласии с компьютерным моделированием. Когда амплитуда осцилляций подвеса заметно превышает критическое значение, размах колебаний маятника при субгармоническом резонансе увеличивается, и в спектре колебаний появляются дополнительные гармоники.

12 Сложные виды периодических режимов

Рассмотренные выше периодические режимы колебаний маятника с осциллирующим подвесом могут усложняться в результате бифуркаций нарушения симметрии и бифуркаций умножения периода. На рис. 17 приведен пример регулярного поведения маятника в виде колебаний с периодом $24T$. Этот вид регулярного поведения можно представить себе как результат умножения периода субгармонических колебаний, а именно в данном примере как утроение периода субгармонического резонанса 8-го порядка.

Сравнивая графики на рис. 17 с рис. 6, можно заметить, что на протяжении 8 последовательных циклов возбуждения характер движения в обоих случаях практически одинаков, но если на рис. 6 в течение последующих 8 циклов движение в точности повторяется (фазовая траектория замыкается после 8 циклов), то на рис. 17 движение слегка отличается от предыдущих 8 циклов. Только после трех проходов по 8 циклов возбуждения каждая фазовая орбита замыкается, и графики дальнейшего движения в точности воспроизводятся. Таким образом, период

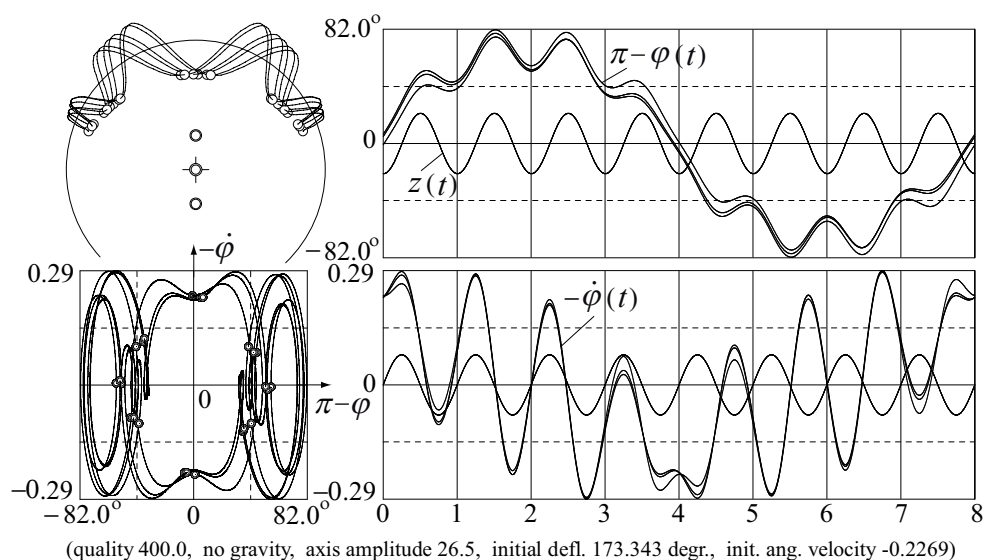


Рис. 17: Пространственная траектория, фазовая орбита и графики регулярных колебаний с периодом $24T$.

этого сложного регулярного движения составляет 24 периода осцилляций подвеса. Однако в спектре таких колебаний доминирует компонента с периодом в 8 циклов возбуждения (как и в спектре субгармонических колебаний 8-го порядка на рис. 6), в то время как основная гармоника с частотой $\omega/24$ имеет малую амплитуду, ответственную только за небольшие различия в колебаниях между соседними последовательностями из 8 циклов возбуждения каждая.

Подобные бифуркации умножения периода при увеличении амплитуды возбуждения в равной мере характерны для субгармонических колебаний около перевернутого и нижнего положений равновесия. На рис. 18 вверху показаны стационарные колебания, период которых равен 10 циклам осцилляций подвеса. Такие колебания большой амплитуды можно трактовать как порождаемые колебаниями с периодом $2T$, характерными для обычного параметрического резонанса, претерпевшими бифуркацию пятикратного умножения периода. Как и в параметрическом резонансе, в спектре колебаний доминирует гармоника с частотой $\omega/2$. Но в отличие от предыдущего примера расхождение графиков колебаний на каждых последовательных двух циклах возбуждения определяется вкладом гармоники с частотой $3\omega/10$, а не основной гармоникой с частотой $\omega/10$, амплитуда которой оказывается гораздо меньше.

Еще один пример сложных стационарных колебаний приведен на рис. 18 внизу. Такое движение с периодом $30T$ можно трактовать как порождаемое колебаниями основного параметрического резонанса с периодом $2T$, претерпевшими сначала бифуркацию пятикратного увеличения периода (породившую движение с периодом $10T$), а затем бифуркацию утроения периода.

Многочисленные стационарные режимы колебаний с большими периодами характеризуются бассейнами притяжения малых размеров, состоящими из нескольких изолированных «островков» на плоскости начальных состояний. Как правило, эти режимы невозможно получить медленным изменением (сканированием) управ-

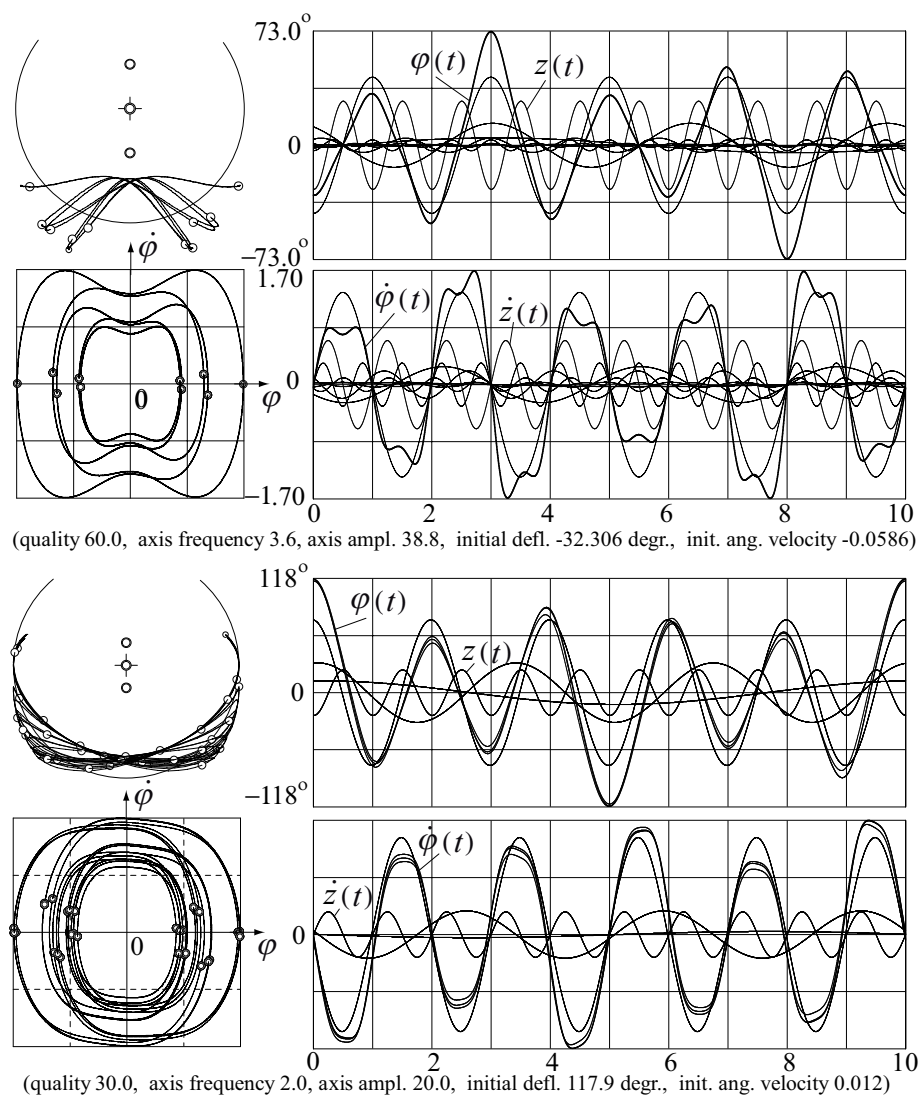


Рис. 18: Пространственная траектория, фазовая орбита и графики регулярных колебаний с периодами $10T$ и $30T$.

ляющих параметров из какой-либо другой моды в процессе движения маятника: когда при сканировании параметры принимают значения, необходимые для данного долгопериодического режима, маятник оказывается захваченным в другой (обычно более простой) сосуществующий предельный цикл.

Другие возможные виды регулярного поведения маятника с осциллирующим подвесом образуются однонаправленными переворотами с периодом, равным целому числу периодов возбуждения, и чередованием переворотов в одну и другую стороны, перемежаемых колебаниями маятника. Периоды таких режимов также составляют целое (иногда большое) число циклов осцилляций подвеса. Динамика колебательно-вращательных режимов жесткого маятника, подверженного параметрическому возбуждению с синусоидальной временной зависимостью, интенсивно изучается на протяжении последних лет (см. [27] и цитированную там литературу).

13 Хаотические режимы

При больших амплитудах осцилляций подвеса маятник обнаруживает разнообразные хаотические режимы. Динамический хаос в простых нелинейных системах стал предметом интенсивного изучения на протяжении последних десятилетий. Маятник с осциллирующим подвесом представляет собой превосходную модель для исследования общих закономерностей динамического хаоса [16] – [22].

Наиболее удобный и наглядный способ отличить хаос от регулярного периодического поведения дает отображение Пуанкаре, т.е. стробоскопическая картина точек на фазовой плоскости, фиксирующих состояние системы через промежутки времени, равные периоду возбуждения T . После завершения начального переходного процесса стационарное движение с периодом nT (например, субгармонический резонанс порядка n) будет проявляться в отображении Пуанкаре как систематические перескоки изображающей точки между n фиксированными точками фазовой плоскости. В случае хаотического поведения маятника сечения Пуанкаре случайным образом ложатся на фазовую плоскость, никогда в точности не совпадая одна с другой. Их поведение на фазовой плоскости дает представление о странном аттракторе изучаемого хаотического движения.

На рис. 19 вверху приведен пример аттрактора чисто колебательного хаотического режима, у которого отображение Пуанкаре образовано двумя изолированными «островками». Этому аттрактору соответствует весьма обширный бассейн притяжения в фазовой плоскости. Изображающая точка посещает эти два островка сечений Пуанкаре в определенном порядке (строго поочередно), но в пределах каждого островка случайным образом блуждает от посещения к посещению. Это значит, что для данного типа движения поток в фазовой плоскости хаотичен, но с течением времени расстояние между любой парой первоначально близких фазовых точек в таком аттракторе остается ограниченным: наибольшее их удаление в фазовой плоскости определяется размерами «островков» отображения Пуанкаре.

Ниже на рис. 19 показан аттрактор хаотического движения маятника при немного уменьшенном трении, в то время как значения всех других параметров прежние. Постепенное уменьшение трения приводит к росту островков отображения Пуанкаре и их слиянию. В результате сечения Пуанкаре образуют множество точек в форме ленты, протянувшейся на значительное расстояние в фазовой плоскости. Как и в предыдущем примере, каждое колебание маятника, охватывающее два цикла осцилляций подвеса, случайным образом немного отличается от предыдущего. Однако в данном случае большой и почти неизменный размах колебаний после совершения большого, но непредсказуемого числа колебаний значительно уменьшается или, наоборот, увеличивается (вплоть до совершения полного переворота). Такие увеличения и уменьшения размаха колебаний приводят иногда к «переключению» фазы колебаний: например, движение маятника вправо, происходившее во время четных циклов возбуждения, сменяется движением в противоположном направлении. В долгих промежутках между такими редкими событиями маятник совершает чисто колебательное движение, в котором размах лишь немного изменяется от цикла к циклу случайным образом. Такое нерегулярное поведение типа перемежаемости существенно отличается от хорошо известного хаотического режима «кувырканий» (“tumbling” chaotic motion, см. [23]), существующего в широком интервале значений параметров системы. В режиме «кувырканий» маят-

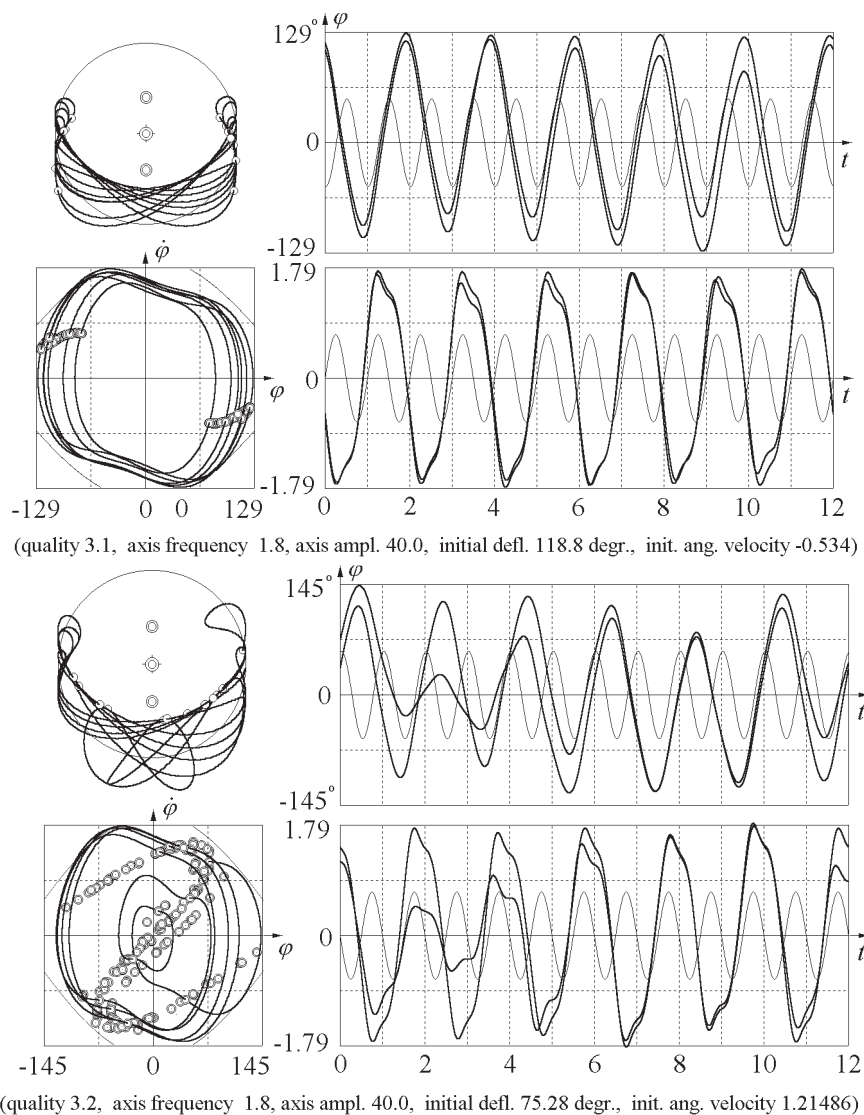


Рис. 19: Хаотические аттракторы с двухзонным (вверху) и ленточным (внизу) множествами сечений Пуанкаре.

ник совершает случайные колебания (размах которых сильно изменяется от цикла к циклу), часто перемежающиеся переворотами в одну и в другую сторону. Странный аттрактор такого режима занимает значительную часть фазовой плоскости.

Еще один тип странных аттракторов иллюстрирует верхняя часть рис. 20. В этом примере маятник не совершает переворотов, его движение все время остается колебательным, и почти повторяется после каждых шести циклов возбуждения. Шесть «островков» сечений Пуанкаре образует две группы по три изолированных островка в каждой. Изображающая точка поочередно посещает эти группы. Она также посещает островки каждой группы в строго определенной последовательности, но в пределах каждого островка точки «скачут» с одного места на другое без всякого видимого порядка. Такой шестизонный аттрактор характеризуется весьма протяженным бассейном притяжения, очень сложным по конфигурации. Когда начальное состояние не принадлежит этому бассейну, маятник в конце концов при-

ходит в один из нескольких регулярных режимов, сосуществующих с хаотическим при тех же значениях параметров. Это могут быть колебания с периодом $2T$, характерные для обычного параметрического резонанса, или колебания с периодом $4T$, показанные в нижней части рис. 20. В последнем примере колебания асимметричны: максимальные отклонения вправо и влево различаются. Такие режимы существуют парами, у которых фазовые траектории представляют собой зеркальные образы одна другой.

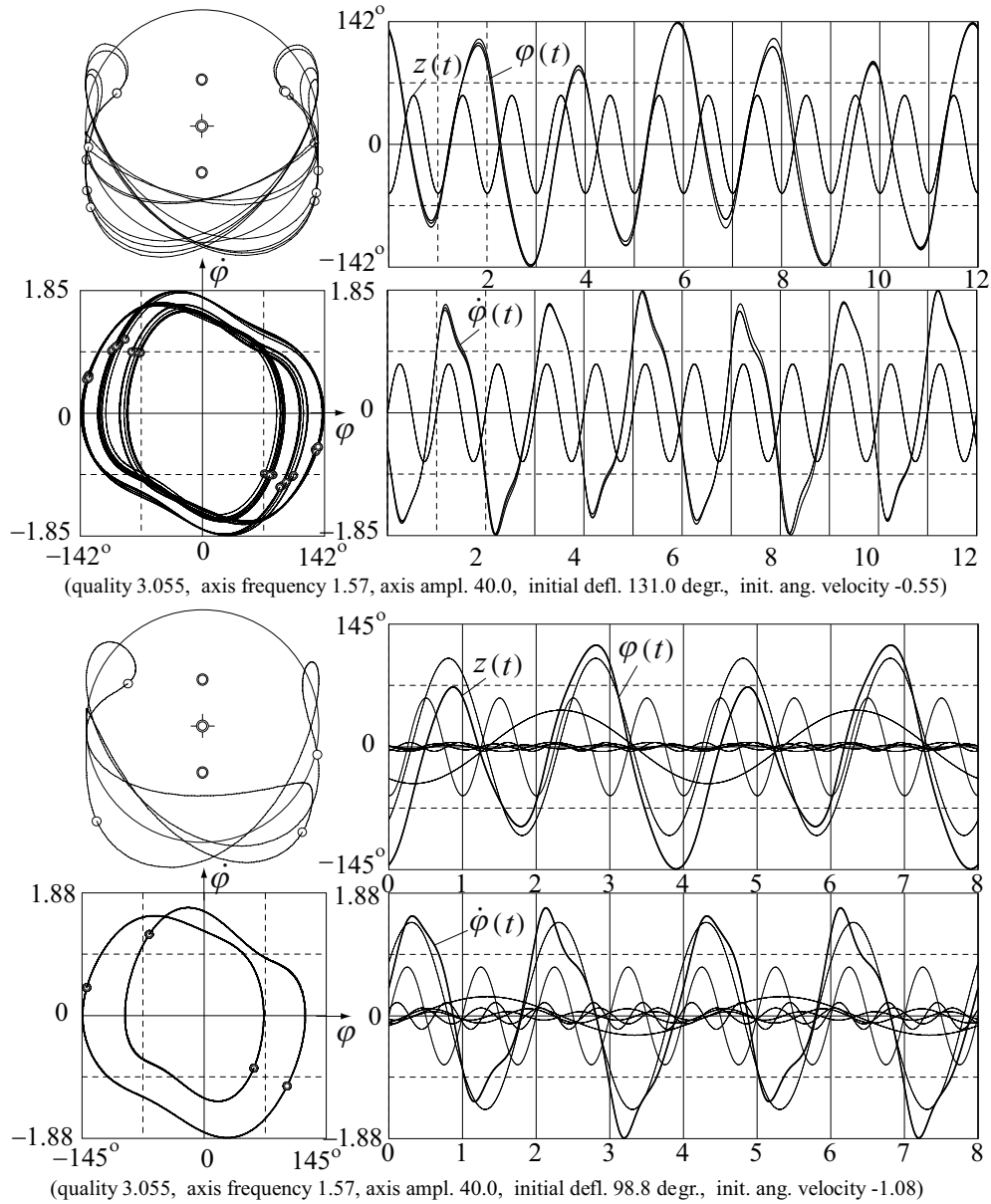


Рис. 20: Странный аттрактор хаотических колебаний и один из сосуществующих с ним периодических аттракторов.

Хаотические режимы существуют также для чисто вращательных и смешанных колебательно-вращательных движений маятника. В таких хаотических аттракторах сечения Пуанкаре могут концентрироваться в нескольких изолированных ост-

ровках фазовой плоскости. Возможный сценарий перехода к хаосу от однонаправленного регулярного вращения лежит через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода, происходящих при медленном изменении управляющего параметра (амплитуды или частоты принудительных осцилляций подвеса, или величины вязкого трения) без прерывания движения маятника. Но для более сложных хаотических режимов, обсуждавшихся выше, не существует универсального сценария перехода к хаосу.

14 Заключительные замечания

Поведение маятника с осциллирующим подвесом намного богаче разнообразными регулярными и хаотическими режимами, чем можно было бы ожидать от столь простой физической системы, полагаясь на интуицию. Некоторые режимы действительно оказываются простыми, чего нельзя сказать о многих неожиданных видах движения, захватывающих большие отклонения от положения равновесия, где нелинейные свойства маятника становятся определяющими.

При достаточно высокой частоте и малой амплитуде осцилляций подвеса многие замечательные особенности поведения маятника, в частности динамическую стабилизацию перевернутого положения, удастся наглядно объяснить на основе предложенного П.Л. Капицей метода разделения быстрых и медленных движений. Этот подход и связанная с ним концепция эффективного потенциала оказываются полезными и при изучении недавно открытых субгармонических резонансов высоких порядков, позволяя объяснить физические причины их возникновения и сосуществование резонансов разных порядков при одних и тех же значениях параметров системы. Предложенная в статье приближенная количественная теория дает возможность рассчитать спектральный состав субгармонических резонансов и установить границы их существования в пространстве параметров системы.

Установление связи субгармонических резонансов с явлением стабилизации перевернутого маятника позволяет получить уточненный критерий динамической стабилизации, справедливый при произвольных значениях частоты и амплитуды осцилляций подвеса, в том числе и при тех значениях, к которым метод разделения движений неприменим.

Отождествление субгармонического резонанса второго порядка с обычным параметрическим резонансом дает физическое объяснение недавно открытому явлению дестабилизации (динамически стабилизированного) перевернутого положения: при достаточно больших амплитудах осцилляций подвеса перевернутый маятник переходит в режим «флаттер»-моды колебаний с периодом $2T$. Это явление полностью аналогично потере устойчивости нижнего положения равновесия при выполнении условий параметрического резонанса. Принадлежность основного параметрического резонанса и флаттер-моды к одной и той же ветви стационарных колебаний маятника позволяет найти критерий потери устойчивости для верхнего положения равновесия тем же методом, что и для нижнего положения. Результаты аналитических расчетов полностью подтверждаются компьютерным моделированием.

Изменение параметров системы (относительной частоты ω/ω_0 и относительной амплитуды a/l осцилляций подвеса, добротности Q) приводит к множеству раз-

личных видов регулярного и хаотического поведения маятника. Динамика маятника обнаруживает большое разнообразие вращательных, колебательных и комбинированных установившихся режимов с периодами, кратными периоду возбуждения. Компьютерное моделирование вскрывает интригующие последовательности бифуркаций, приводящих к многочисленным хаотическим аттракторам, бассейны притяжения которых имеют чрезвычайно сложную (фрактальную) структуру. В этой статье мы коснулись лишь некоторых наиболее характерных особенностей поведения маятника с осциллирующим подвесом. Многие экзотические режимы еще ждут своего исследователя. Эта простая на первый взгляд физическая система представляется поистине неисчерпаемой.

Список литературы

- [1] Stephenson A “On an induced stability” *Phil. Mag.* **15**, 233 – 236 (1908)
- [2] Капица П Л “Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса” *ЖЭТФ* **21** 588 – 597 (1951)
- [3] Капица П Л “Маятник с вибрирующим подвесом” *УФН* **44** 7 – 20 (1951)
- [4] Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: «Наука», 123 – 125, 1988)
- [5] Блехман И И *Вибрационная механика* (М.: «Наука», 95 – 106, 1994)
- [6] Неймарк Ю И, Ланда П С *Стохастические и хаотические колебания* (М.: «Наука», 1987)
- [7] Blackburn J A, Smith H J T, Groenbech-Jensen N “Stability and Hopf bifurcations in an inverted pendulum” *Am. J. Phys.* **60** 903 – 908 (1992)
- [8] Smith H J T Blackburn J A “Experimental study of an inverted pendulum” *Am. J. Phys.* **60** 909 – 911 (1992)
- [9] Acheson D J “Multiple-nodding oscillations of a driven inverted pendulum” *Proc. Roy. Soc. London A* **448** 89 – 95 (1995)
- [10] Phelps F M III and J H Hunter Jr. “An analytical solution of the inverted pendulum” *Am. J. Phys.* **33** 285 – 295 (1965), **34** 533 – 535 (1966)
- [11] D J Ness “Small oscillations of a stabilized, inverted pendulum” *Am. J. Phys.* **35** 964 – 967 (1967)
- [12] Grandy W T Jr., Schöck M “Simulations of nonlinear pivot-driven pendula” *Am. J. Phys.* **65** 376 – 381 (1997)
- [13] Fenn J G, Bayne D A, Sinclair B D “Experimental investigation of the ‘effective potential’ of an inverted pendulum” *Am. J. Phys.* **66** 981 – 984 (1998)
- [14] Butikov E I “On the dynamic stabilization of an inverted pendulum” *Am. J. Phys.* **69** 755 – 768 (2001)
- [15] Butikov E I “Subharmonic Resonances of the Parametrically Driven Pendulum” *Journal of Physics A: Mathematical and General* **35** 6209 – 6231 (2002)

- [16] McLaughlin J B “Period-doubling bifurcations and chaotic motion for a parametrically forced pendulum” *J. Stat. Physics* **24** 375 – 388 (1981)
- [17] Koch B P, Leven R W, Pompe B, and Wilke C “Experimental evidence for chaotic behavior of a parametrically forced pendulum” *Phys. Lett. A* **96** 219 – 224 (1983)
- [18] Leven R W, Pompe B, Wilke C, and Koch B P “Experiments on periodic and chaotic motions of a parametrically forced pendulum” *Physica D* **16** 371 – 384 (1985)
- [19] van de Water W, Hoppenbrouwers M, Christiansen F “Unstable periodic orbits in the parametrically excited pendulum” *Phys. Rev. A* **44** 6388 – 6398 (1991)
- [20] Starrett J, Tagg R “Control of a chaotic parametrically driven pendulum” *Phys. Rev. Lett.* **74**, (11) 1974 – 1977 (1995)
- [21] Sang-Yoon K, Bambi Hu “Bifurcations and transitions to chaos in an inverted pendulum” *Phys. Rev. E* **58** 3028 – 3035 (1998)
- [22] Butikov E I “Regular and chaotic motions of the parametrically forced pendulum: theory and simulations” LNCS (Springer Verlag) **2331** 1154 — 1169 (2002)
- [23] Clifford M J, Bishop S R “Inverted oscillations of a driven pendulum” *Proc. Roy. Soc. London A* **454** 2811 – 2817 (1998)
- [24] Butikov E I “Pendulum with the vertically driven pivot” (Computer simulations of nonlinear oscillatory systems) <http://faculty.ifmo.ru/butikov/Nonlinear>
- [25] Butikov E I “The rigid pendulum – an antique but evergreen physical model” *Eur. J. Phys.* **20** 429 — 441 (1999)
- [26] Butikov E I “Extraordinary oscillations of an ordinary forced pendulum” *Eur. J. Phys.* **29** 215 — 233 (2008)
- [27] Xu Xu, Wiercigroch M, Cartmell M P “Rotating orbits of a parametrically excited pendulum” *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 1537 – 1548 (2005)